UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CUADERNO DE EJERCICIOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

ARNULFO ANDRADE DELGADO
SERGIO CARLOS CRAIL CORZAS

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

Con todo mi amor para mis nietos:

Rebeca, Santiago, Bernardo,
Sebastián y José María

Arnulfo

P R Ó L O G O

La presente obra, pretende ser un elemento de apoyo de estudio para los estudiantes que cursan la asignatura Cálculo Diferencial en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, o bien, un recurso didáctico para los profesores que imparten dicha asignatura. Consta de cinco capítulos, en cada uno de ellos se presentan tanto ejercicios resueltos como ejercicios propuestos, todos ellos versan sobre temas que corresponden al título del capítulo en el que están incluidos, se intentó que el orden en el que están dispuestos los ejercicios en cada capítulo, fuera el mismo en el que aparecen los contenidos correspondientes en el programa de la asignatura. El diseño de los ejercicios tiene la pretensión de mostrar el manejo y la aplicación de los conceptos que se contemplan en dicho programa.

La idea y la realización de este cuaderno de ejercicios fueron fundamentalmente del distinguido maestro **Ing. Arnulfo Andrade Delgado** ✝.

Esperamos que el contenido del presente cuaderno sea de utilidad, tanto para alumnos como para profesores de esta Facultad, y solicitamos atentamente que sus observaciones que tengan a bien hacer de este trabajo, nos las hagan llegar al Departamento de Cálculo Diferencial, pues serán bienvenidas con la idea de mejorarlo para posteriores impresiones.

Hemos de agradecer la valiosa colaboración que la Ing. Alejandra Vargas Espinoza de los Monteros tuvo en sus revisiones y sugerencias para este trabajo, también a la Ing. Elba Karén Sáenz García por su entusiasta participación y por sus atinadas observaciones. Agradecemos la colaboración de la secretaria de la Coordinación de Matemáticas, María Guadalupe Martínez Dávalos, por la captura que hizo de este trabajo. En esta segunda edición agradecemos la colaboración en la revisión del material a la M.I. Mayverena Jurado Pineda.

Agradecemos a las autoridades universitarias su apoyo para la realización de este tipo de obras, pues ello favorece y enriquece la vida académica de esta institución.

Arnulfo Andrade Delgado **Sergio Carlos Crail Corzas**

Í N D I C E

Página

F U N C I O N E S



E J E R C I C I O S R E S U E L T O S

I.1 Dada la relación:

$$R = \left\{ (x , y) \mid x \in IR ,\ y > x \right\}$$

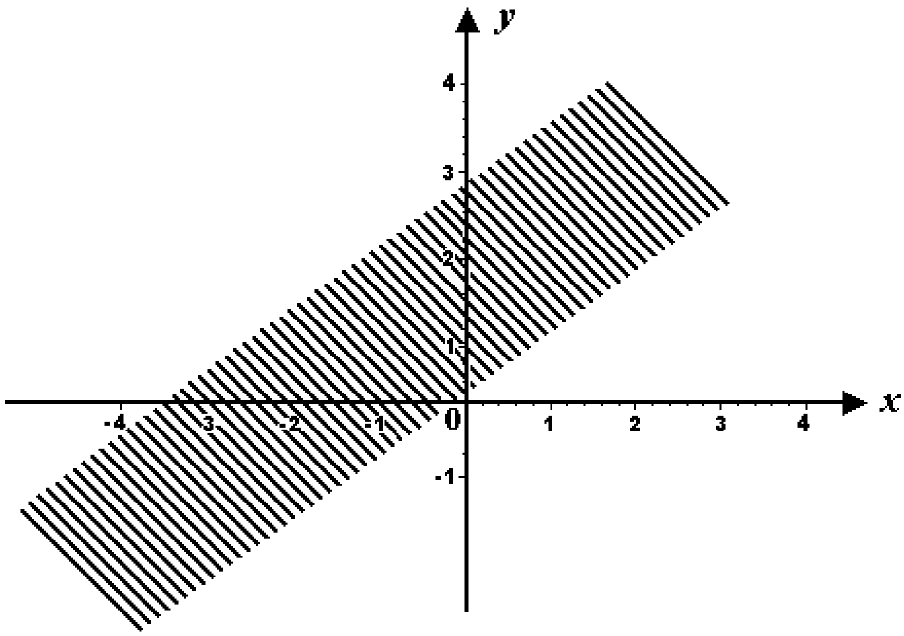
obtener su gráfica

SOLUCIÓN:

Si en forma auxiliar se considera la recta de ecuación

$$y = x$$

Se deduce que la gráfica de la relación está constituida por todos los puntos del plano cartesiano cuya ordenada $"y"$ es mayor que su abscisa, la recta mencionada no forma parte de la gráfica.



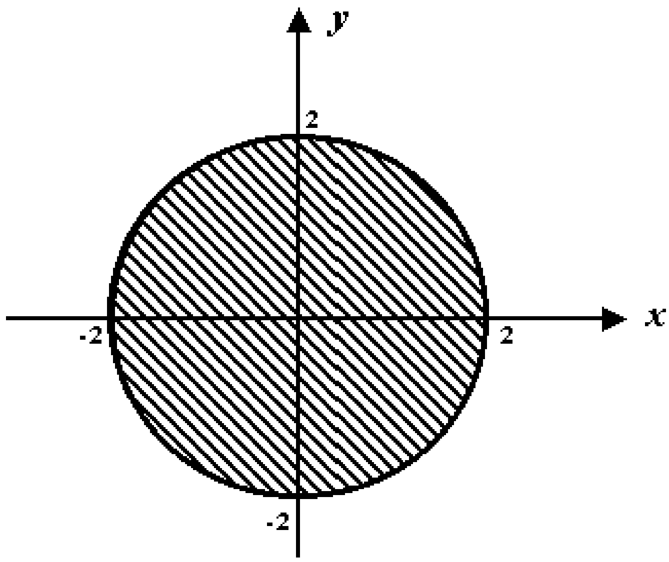
I.2 Sea la relación:

$$R = \left\{ (x , y) \mid x \in IR ,\ x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

Trazar su gráfica

SOLUCIÓN:

La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ representa una circunferencia de centro en el origen y radio $r = 2$. La gráfica de la relación esta constituida por todos los puntos del círculo cuyo centro es $C(0, 0)$ y radio $r = 2$

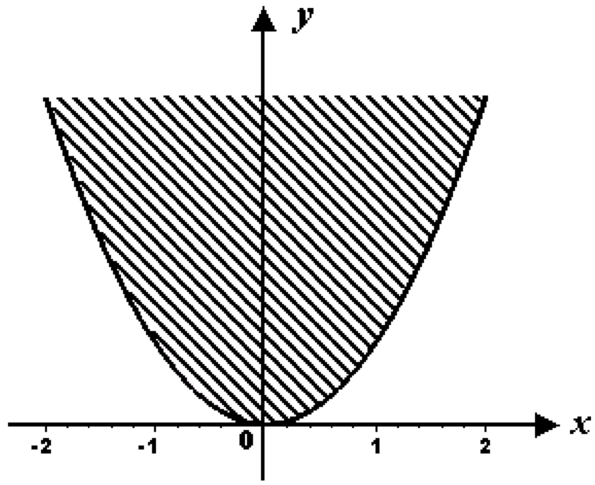


I.3 Trazar la gráfica de la siguiente relación

$$R = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x \in IR,\ y \geq x^2 \right\}$$

SOLUCIÓN:

La ecuación $y = x^2$ representa una parábola con vértice en el origen y que abre su concavidad hacia arriba. La gráfica de la relación está formada por todos los puntos de coordenadas (x, y) que satisfacen la desigualdad $y \geq x^2$ esto es, la región comprendida entre la concavidad de la parábola y ella misma.



I.4 Dada la relación:

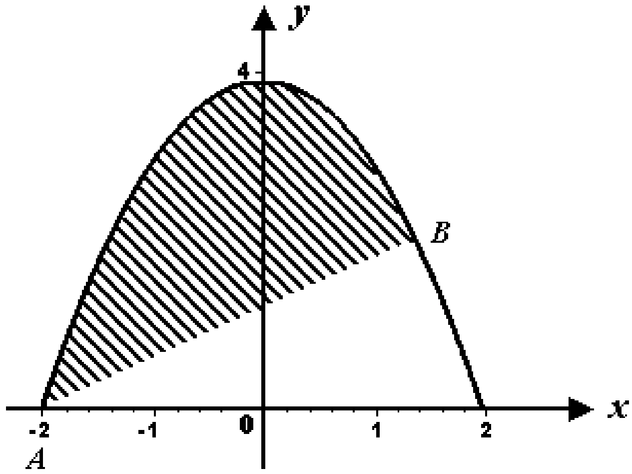
$$R = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x \in \Re,\ y \leq 4 - x^2,\ y > \frac{x}{2} + 1 \right\}$$

Trazar su gráfica

SOLUCIÓN:

La ecuación $y = 4 - x^2$ corresponde a una parábola de vértice $V(0, 4)$ que abre su concavidad hacia abajo. La ecuación auxiliar $y = \frac{x}{2} + 1$ representa una recta de pendiente $m = \frac{1}{2}$ y ordenada en el origen $b = 1$.

La gráfica de la relación es la región comprendida entre la parábola y la recta mencionadas incluyendo el arco correspondiente de la parábola y sin incluir el segmento de recta entre los puntos A y B.



I.5 Escribir en el paréntesis una $"V"$ si la proposición es correcta o una $"F"$ si es falsa:

a) Una función puede ser una relación multiforme ( )

b) Una función puede ser una relación biunívoca ( )

c) Una relación puede ser una relación uniforme ( )

d) Una función puede ser una relación unívoca ( )

e) Una relación siempre es una función ( )

f) Una función siempre es una relación ( )

g) Una función es un subconjunto de una relación binaria ( )

h) Una relación binaria es un subconjunto de una función ( )

SOLUCIÓN:

a) (F) b) (V) c) (V) d) (V)

e) (F) f) (V) g) (V) h) (F)

I.6 Escribir en el paréntesis el número que corresponde a una aseveración correcta:

a) Una función puede expresarse por ( )

b) En una función real de variable real ( )

c) Si $y = f(x)$ el dominio de la función es ( )

d) Si $a < b$, el conjunto de números "x" tales que $a < x < b$ es ( )

e) Una relación siempre es una función ( )

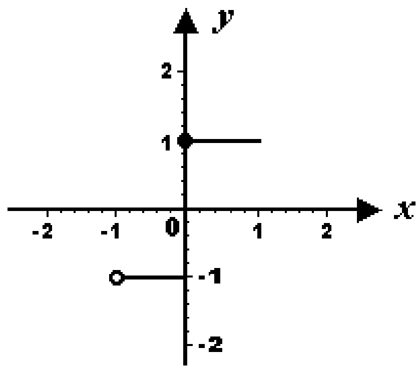
f) Una función siempre es una relación ( )

1. Un intervalo abierto.
2. El conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente "y".
3. Un intervalo cerrado.
4. $y = x^2 + 4$.
5. El conjunto de todos los valores que toma la variable independiente "x".
6. Extensión o comprensión.
7. Tanto la variable dependiente como la independiente son números reales.
8. La variable independiente es un número natural y la variable dependiente es un número real.

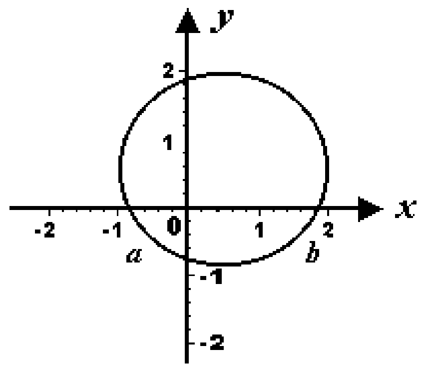
SOLUCIÓN:

a) (6); b) (7); c) (5); d) (1); e) (2); f) (4)

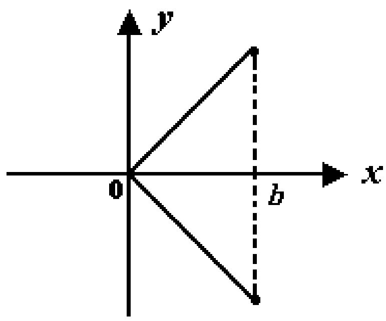
I.7 Considerando las gráficas de relaciones siguientes indicar para cada una si se trata de una función o no.



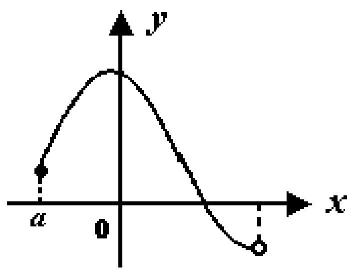
A)



B)



C)



D)

SOLUCIÓN:

a) Sí es la gráfica de una función, ya que a cada valor de "x" corresponde un solo valor de "y".

b) No se trata de la gráfica de una función. A cada valor de "x" en el intervalo abierto (a, b) corresponden dos valores de "y".

c) No es la gráfica de una función, dado que a cada valor de "x" en el intervalo semiabierto $(0, b]$ corresponden dos valores de "y"

d) Sí es la gráfica de una función, puesto que a cada valor de "x" en el dominio $D_f = [a, b)$ corresponde un solo valor de "y"

I.8 Dadas las siguientes relaciones, para cada una trazar la gráfica e indicar si se trata de una función o no

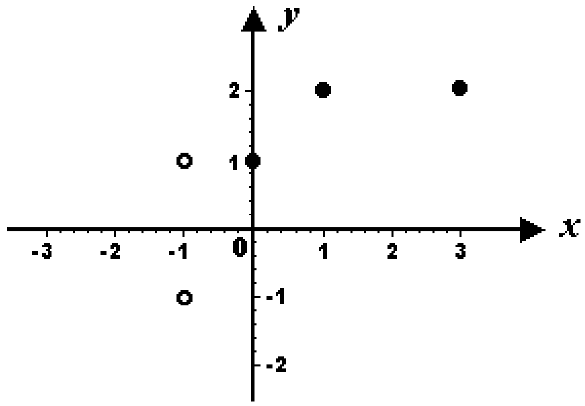
a) $R_1 = \{(-1,\ 1),\ (0,\ 1),\ (1,\ 2),\ (3,\ 2),\ (-1,\ -1)\}$

b) $R_2 = \{(x,\ y) \mid y = -2 \quad si \quad x < 1,\quad y = 3 \quad si \quad x \geq 1\}$

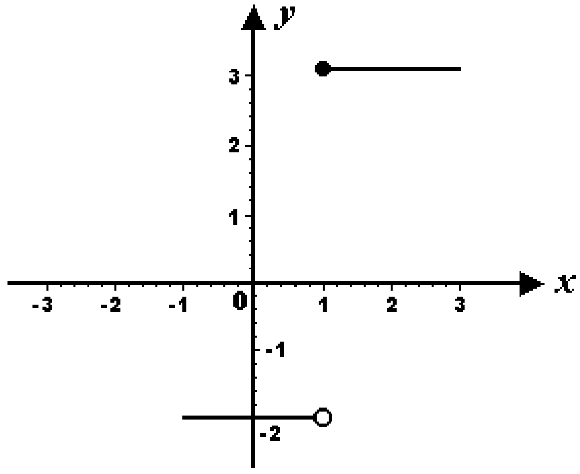
c) $R_3 = \{(x,\ y) \mid x \in IR,\ x^2 + y^2 = 4,\quad y \geq 0\}$

SOLUCIÓN:

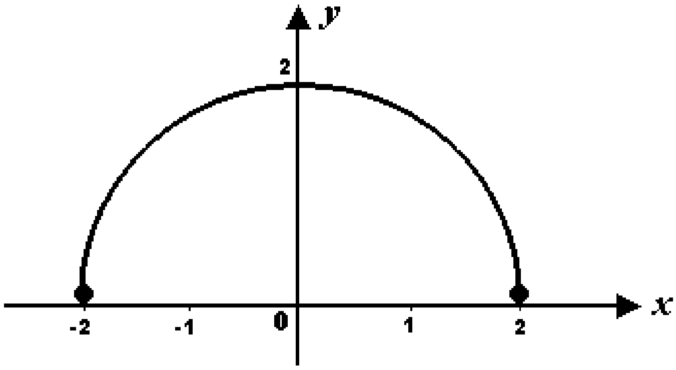
a) R_1 no es una función ya que el valor $x_1 = -1$ corresponden dos valores de "y" $y_1 = 1$, $y_2 = -1$.



b) R_2 sí es una función, dado que a cada valor de "x" en $D_{R_2} = R$ corresponde a un valor de "y"



c) R_3 sí es una función, la gráfica es una semicircunferencia de centro en el origen, radio 2, $y \geq 0$. A cada valor de "x" en $D_{R_3} = [-2, 2]$ corresponde un solo valor de "y"



I.9 Sea la relación:

$$R = \left\{ (x, y) \middle| x \in IR, \quad x + 2y - 2 = 0, \; x \leq 2, \; y \geq 0 \right\}$$

Trazar su gráfica e indicar si es una función o no. En todo caso obtener su dominio y su rango o recorrido.

SOLUCIÓN:

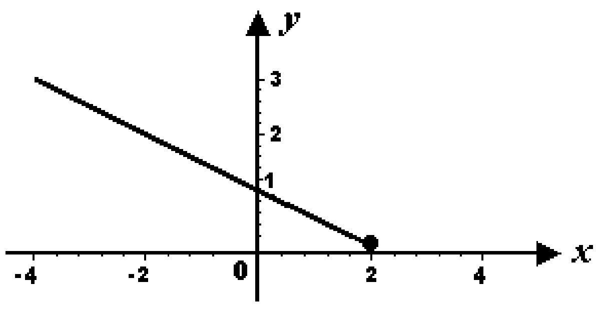
La ecuación que se tiene como regla de correspondencia puede escribirse:

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

que es la ecuación de una recta de pendiente $m = -\frac{1}{2}$ y ordenada en el origen $b = 1$.

Como $y \geq 0$ la gráfica es la semirecta que se localiza arriba del eje de las abscisas.

Si se trata de una función, dado que a cada valor de "x" en el dominio $D_R = \{ x \mid x \in IR \; x \leq 2 \}$ corresponde un solo valor de "y" en el rango que es $R_R = \{ y \mid y \in IR \; y \geq 0 \}$



I.10 Considerando la relación:

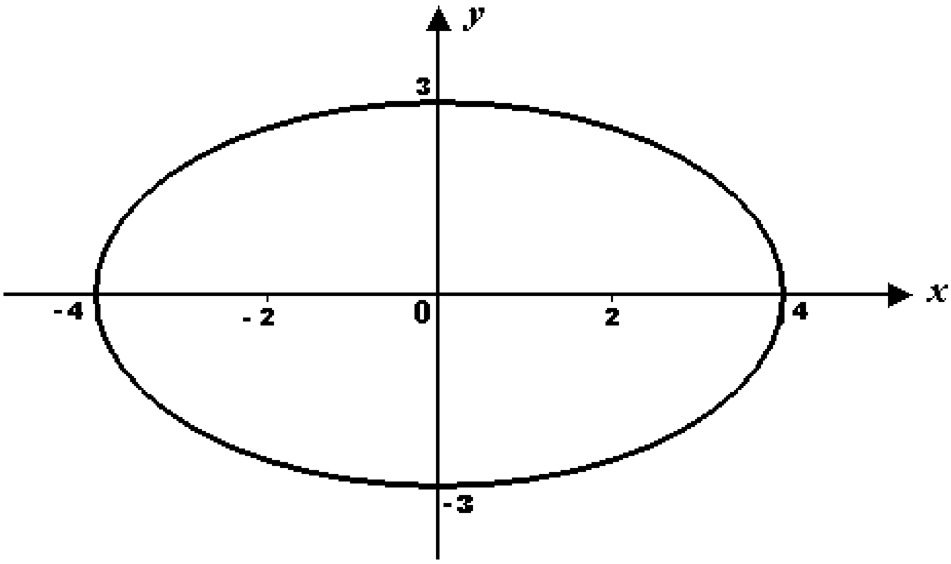
$$R = \left\{ (\ x\ ,\ y\ )\ \middle|\ x,\ y \in IR\ ,\ 9x^2 + 16y^2 = 144 \right\}$$

trazar su gráfica, determinar su dominio y su recorrido. Decir si es una función o no.

SOLUCIÓN:

La ecuación $9x^2 + 16y^2 = 144$ puede escribirse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ que representa una elipse con centro en el origen, eje focal sobre el eje de las abscisas, $a = 4$, $b = 3$

El dominio es: $D_R = \left\{ x \mid -4 \le x \le 4 \right\}$ y el recorrido es: $R_R = \left\{ y \mid -3 \le y \le 3 \right\}$



No es una función ya que a cada valor de "x" en el intervalo abierto $(-4,\ 4)$ corresponden dos valores de "y"

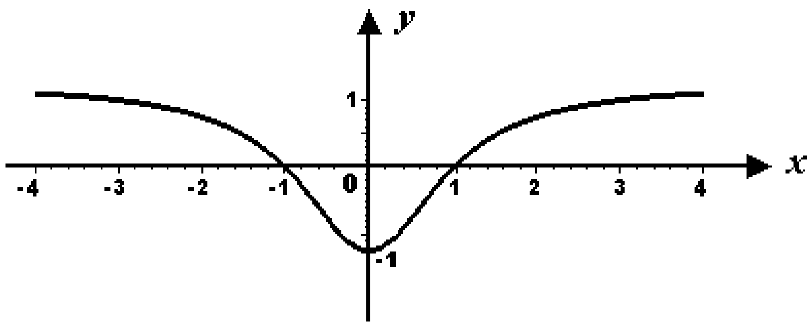
I.11 Dada la relación:

$$R = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x \in IR,\; y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right\}$$

trazar su gráfica e indicar si se trata de una función o no. Escribir su dominio y su rango o recorrido.

SOLUCIÓN:

Tabulando algunos valores de $"x"$ y de $"y"$, se obtiene:



x	y
-4	$\frac{15}{17}$
-3	$\frac{4}{5}$
-2	$\frac{3}{5}$
-1	0
0	-1
2	$\frac{3}{5}$
3	$\frac{4}{5}$
4	$\frac{15}{17}$

Sí se trata de una función, ya que a cada valor de $"x"$ corresponde un solo valor de $"y"$. Dominio: $D_f = R$ y recorrido: $R_R = \{ y \mid y \in IR,\ y \geq -1 \}$

I.12 Dada la siguiente relación, obtener su dominio, recorrido y trazar su gráfica. Indicar si se trata de una función o no.

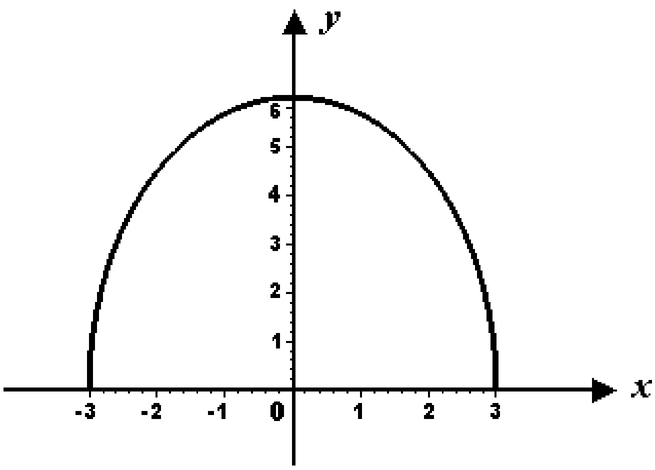
$$R = \left\{ (x, y) \mid 4x^2 + y^2 = 36,\ y \geq 0 \right\}$$

SOLUCIÓN:

La regla de correspondencia puede escribirse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ que corresponde a una elipse con centro $C(0, 0)$, $a = 6$, $b = 3$ y eje focal sobre el eje de las ordenadas. Despejando $"y"$ para tener la regla de correspondencia en forma explícita:

$$y^2 = 36 - 4x^2;\ y = \sqrt{36 - 4x^2};\ y = 2\sqrt{9 - x^2} \quad \text{y} \quad y \in IR \ \ si\ \ 9 - x^2 \geq 0;\ |x| \leq 3$$

Entonces $D_R = [-3, 3]$ y el mayor valor que toma $"y"$ es 6, luego $R_R = [0, 6]$. Si se trata de una función, cada valor de x en $[-3, 3]$ le corresponde un solo valor de $"y"$



I.13 Sea

$$f = \left\{ (x, y) \mid y = 3 - \sqrt{x} \right\}$$

Indicar si se trata de una función o no. En todo caso obtener su dominio, recorrido y gráfica.

SOLUCIÓN:

Como $y \in IR$ si $x \geq 0$, luego el dominio es:

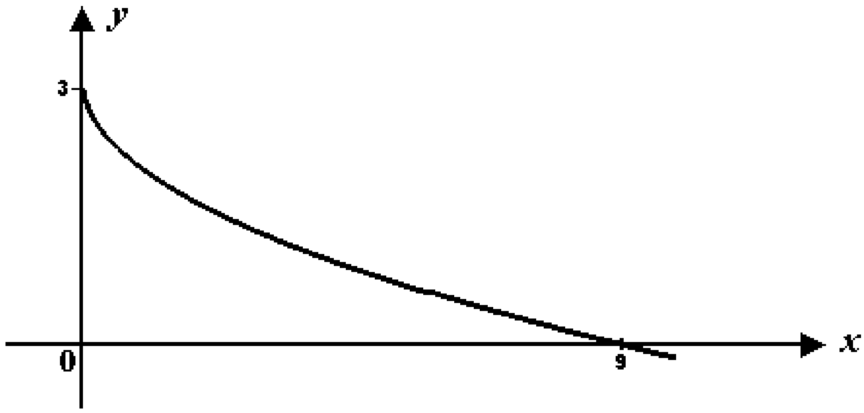
$$D_f = IR^+ + \{ 0 \}$$

El mayor valor que toma $"y"$ es 3, luego el recorrido es:

$$R_f = \{ y \mid y \leq 3 \}$$

Si se trata de una función a cada valor de $"x"$ en D_f corresponde un solo valor de $"y"$.

La regla de correspondencia puede escribirse: $y - 3 = -\sqrt{x}$; $(y-3)^2 = (x-0)$ por lo que la gráfica es un arco de parábola con vértice $V(0, 3)$ y parámetro $p = \frac{1}{4}$



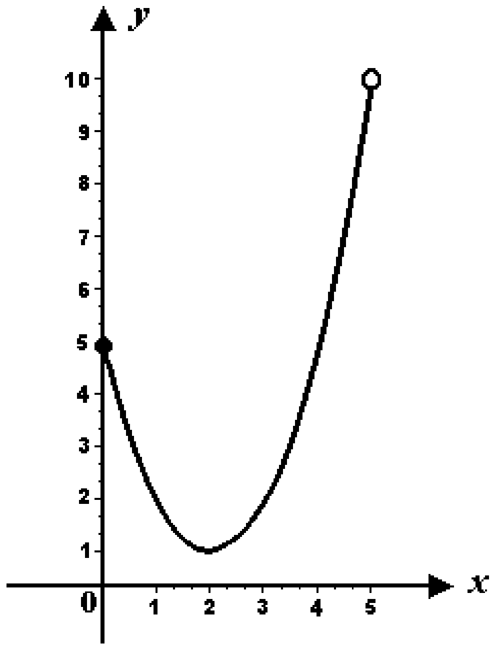
I.14 Sea $f = \left\{ (x, y) \,\middle|\, y = (x-2)^2 + 1,\ 0 \leq x < 5 \right\}$

Indicar si f es una función o no. En cualquier caso obtener el dominio, recorrido y trazar la gráfica.

SOLUCIÓN:

En la regla de correspondencia se observa que a cada valor real de $"x"$ corresponde un solo valor de $"y"$, entonces sí se tiene una función: $y - 1 = (x - 2)^2$

La gráfica es un arco de parábola cuyo vértice es $V\ (2\ ,\ 1)\ ,\ p=\frac{1}{4}$ y que se abre en el sentido positivo del eje de las ordenadas. El dominio es: $D_f=\{\ x\ |\ 0\ \le\ x\ <\ 5\ \}$ y el recorrido es: $R_f=\{\ y\ |\ 1\ \le\ y\ <\ 10\ \}$



I.15 Dada

$$f=\left\{\ (\ x\ ,\ y\ )\ \middle|\ y=+\sqrt{x^2}\ \right\}$$

Decir si se tiene una función o no. En todo caso determinar el dominio, recorrido y trazar la gráfica.

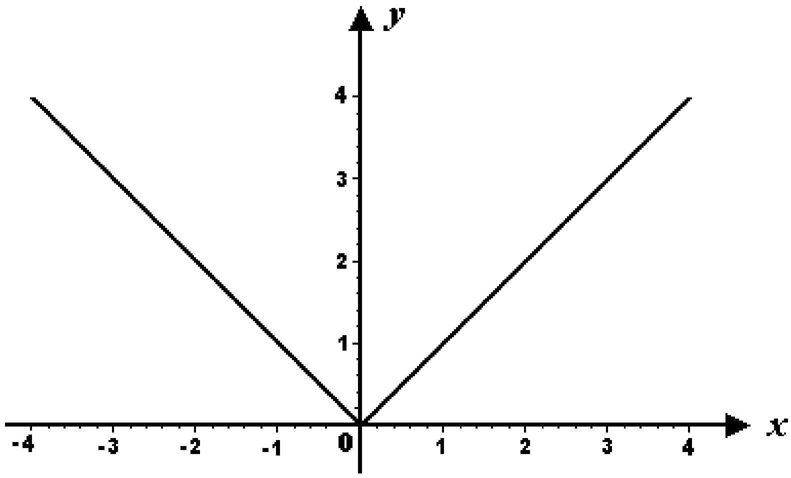
SOLUCIÓN:

f sí es una función ya que a cada valor real de "x" corresponde un solo valor de "y". El dominio es $D_f=IR$.

El menor valor que toma "y" es cero entonces el recorrido es $R_f=\{\ y\ |\ y\ge 0\ \}$

observación: la regla de correspondencia puede escribirse:

$$y = | x |$$



I.16 Dada $f = \left\{ (x, y) \;\middle|\; y = \dfrac{2}{3} \sqrt{x^2 + 9} \right\}$

Indicar si se trata de una función o no. En todo caso determinar su dominio, recorrido y gráfica.

SOLUCIÓN:

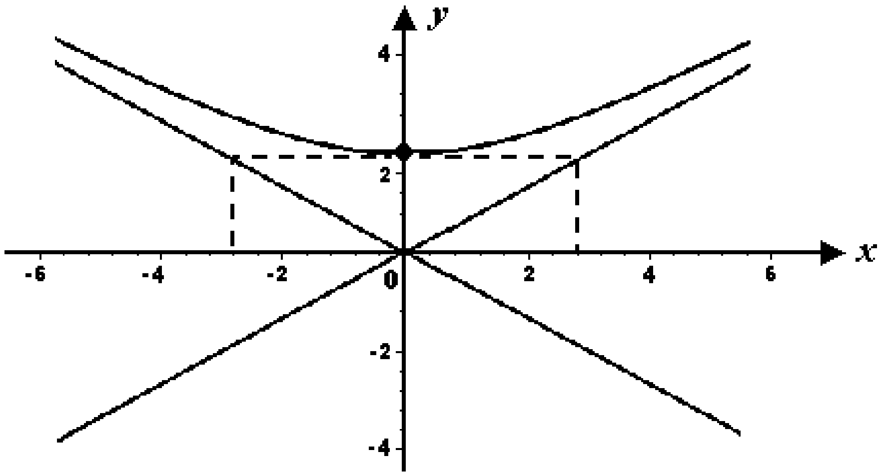
La regla de correspondencia puede transformarse como sigue:

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{x^2 + 9} \; ; \quad 3y = 2\sqrt{x^2 + 9} \; ; \quad 9y^2 = 4(x^2 + 9) \; ;$$

$$9y^2 = 4x^2 + 36 \; ; \quad 9y^2 - 4x^2 = 36 \; ; \quad \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$

que es la ecuación de una hipérbola con centro en el origen $C(0, 0)$, eje focal sobre el eje de las ordenadas, $a = 2$, $b = 3$ $''y''$ solamente toma valores positivos, entonces sí se trata de una función. El dominio es: $D_f = IR$

el recorrido es: $R_f = \{ y \mid y \geq 2 \}$

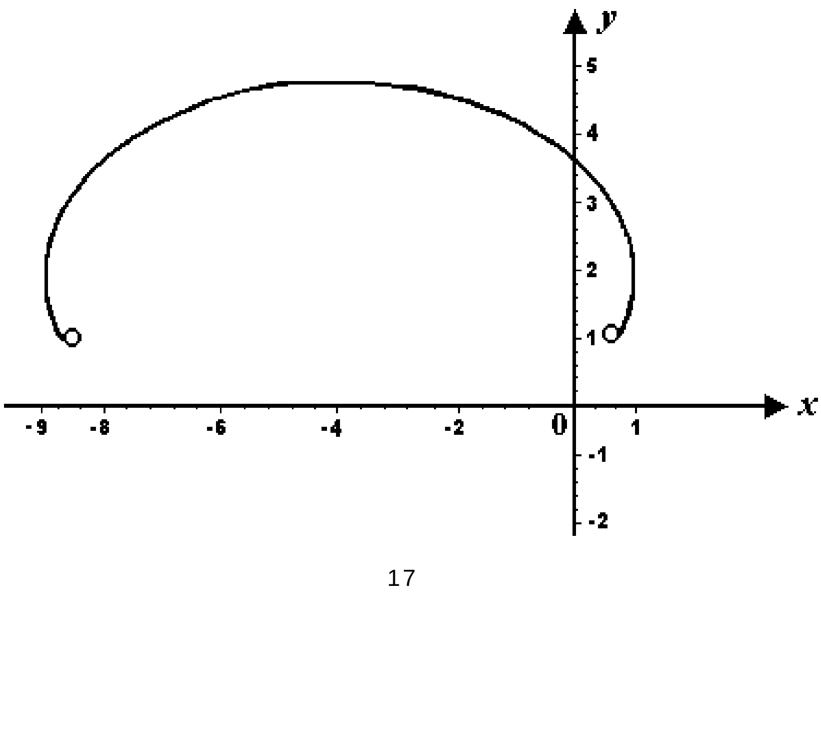


I.17 Si $R = \left\{ (x, y) \mid 9(x+4)^2 + 25(y-2)^2 = 225 , \quad y > 1 \right\}$

Investigar si R es una función o no. En todo caso obtener el dominio, recorrido y trazar la gráfica.

SOLUCIÓN:

La ecuación que actúa como regla de correspondencia puede escribirse: $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ que corresponde a una elipse de centro $C(-4, 2)$, $a = 5$, $b = 3$ y eje focal paralelo al eje de las abscisas. El dominio es: $D_r = \left\{ x \mid -9 \le x \le 1 \right\}$ y el recorrido es: $R_r = \left\{ y \mid 1 < y \le 5 \right\}$. No es función, a valores de "x" cercanos a -9 por la derecha y cercanos a 1 por la izquierda corresponden dos valores de "y". Se trata de una relación multiforme.



I.18 Si $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$, obtener $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(-2)$

SOLUCIÓN:

$f(0) = 0 - 0 + 5 = 5$

$f(1) = 2(1) - 4(1) + 5 = 3$

$f(2) = 2(2)^2 - 4(2) + 5 = 8 + 8 + 5 = 5$

$f(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) + 5 = 8 + 8 + 5 = 21$

I.19 Dada $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, determinar $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ y $f\left(-\frac{2}{3}\right)$

SOLUCIÓN:

$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 2(2) - 1 = 8 - 12 + 4 - 1 = -1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^3} - \frac{3}{2^2} + \frac{2}{2} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1 - 1 = \frac{1-6}{8} = -\frac{5}{8}$

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 3\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{2}{3}\right) - 1 = -\frac{8}{27} - \frac{12}{9} - \frac{4}{3} - 1$

$= \frac{8 + 36 + 36 + 27}{27} = -\frac{107}{27}$

I.20 Si $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$, demostrar que:

a) $f(-2) = f(5)$;

b) $f(0) = -2\ f(3)$;

c) $f(-1) = f(7)$;

d) $f(a+1) = a^3 - 2a^2 - 11a + 12$

SOLUCIÓN:

a) $f(-2) = f(-2)^3 - 5(-2)^2 - 4(-2) + 20 = -8 - 20 + 8 + 20 = 0$

$f(5) = 5^3 - 5(5)^2 - 4(5) + 20 = 125 - 125 - 20 + 20 = 0$

luego $f(-2) = f(5)$

b) $f(0) = 0 - 0 - 0 + 20 = 20$

$f(3) = 27 - 45 - 12 + 20 = -10$, $-2\ f(3) = -2\ f(3) = -2(-10) = 20$

luego $f(0) = -2\ f(3)$

c) $f(7) = 7^3 - 5(7)^2 - 4(7) + 20 = 34320 - 2450 - 28 + 20 = 90$

$f(-1) = -1 - 5 + 4 + 20 = 18,\ 5f(-1) = 5(18) = 90$

luego $f(7) = 5f(-1)$

d) $f(a+1) = (a+1)^3 - 5(a+1)^2 - 4(a+1) + 20 =$

$= a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - 5a^2 - 10a - 5 - 4a - 4 + 20 =$

$= a^3 - 2a^2 - 11a + 12$

I.21 Dada $f(x) = x^2 - 2x + 6$, demostrar que:

$$f(x+h) = x^2 - 2x + 6 + 2(x-1)h + h^2$$

SOLUCIÓN:

$f(x+h) = (x+h)^2 - 2(x+h) + 6 = x^2 + 2hx + h^2 - 2x - 2h + 6$

$= x^2 - 2x + 6 + 2(x-1)h + h^2$

I.22 Dada $g(x) = x^3 + 3x$, demostrar que:

$$g(x+h) - g(x) = 3(x^2+1)h + 3xh^2 + h^3$$

SOLUCIÓN:

$g(x+h) - g(x) = (x+h)^3 + 3(x+h) - x^3 - 3x =$

$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 3x + 3h - x^3 - 3x =$

$= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 3h =$

$= 3(x^2+1)h + 3xh^2 + h^3$

I.23 Sea $f(x) = \frac{1}{x}$, demostrar que $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{1}{(h+x)x}$

SOLUCIÓN:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \frac{x-x-h}{h(x+h)x} = -\frac{h}{h(x+h)x} = -\frac{1}{(h+x)x}$$

I.24 Si $F(x) = 4^{x}$, demostrar que: $F(a+1) - F(a) = 3F(a)$

SOLUCIÓN:

$$F(a) = 4^{a+1} - 4^{a} = (4-1)\,4^{a} = 3(4)^{a} = 3F(a)$$

I.25 Siendo $f(x) = a^{x}$, hacer ver que $f(c)\,f(d) = f(c+d)$

SOLUCIÓN:

$$f(c)\,f(d) = a^{c}\,a^{d} = a^{c+d}$$

pero: $f(c+d) = a^{c+d}$

entonces $f(c)\,f(d) = f(c+d)$

I.26 Sí $g(x) = log\,\dfrac{1-x}{1+x}$, demostrar que $g(y) + g(z) = g\left(\dfrac{y+z}{1+yz}\right)$

SOLUCIÓN:

$$g(y) + g(z) = log\,\frac{1-y}{1+y} + log\,\frac{1-z}{1+z} = log\left[\frac{1-y}{1+y}\bullet\frac{1-z}{1+z}\right] = log\,\frac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z}$$

Ahora $$g\left(\frac{y+z}{1+yz}\right) = log\,\frac{1-\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+\dfrac{y+z}{1+yz}} = log\,\frac{\dfrac{1+yz-y-z}{1+yz}}{\dfrac{1+yz+y+z}{1+yz}} = log\,\frac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z}$$

I.27 Sea $f(\varphi) = sen\,\varphi + cos\,\varphi$, hacer que:

a) $f(0) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ b) $f(\pi) = -f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ c) $f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) = -f(0)$

SOLUCIÓN:

a) $f(0) = sen\,0 + cos\,0 = 0 + 1 = 1$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = sen\,\dfrac{\pi}{2} + cos\,\dfrac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$ luego $f(0) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

b) $f(\pi) = sen\,\pi + cos\,\pi = 0 - 1 = -1$

$-f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ luego $f(\pi) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

c) $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = sen\,\frac{3}{2}\pi + cos\,\frac{3}{2}\pi = -1 + 0 = -1$

$-f(0) = -1$ luego $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -f(0)$

I.28 Si $f(\theta) = sen\,2\theta + cos\,\theta$, obtener: $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

SOLUCIÓN:

$f(0) = sen\,0 + cos\,0 = 0 + 1 = 1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen\,\pi + cos\,\frac{\pi}{2} = 0 + 0 = 0$

$f(\pi) = sen\,2\pi + cos\,\pi = 0 - 1 = -1$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen\,\frac{2}{3}\pi + cos\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = sen\,\frac{\pi}{3} + cos\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = +\sqrt{3}$

I.29 De las siguientes asociaciones, indicar cuál define una función inyectiva, explicando la respuesta.

a) A cada persona que vive en la tierra, asignarle el año de su nacimiento.

b) A cada libro escrito por un solo autor, asignarle su autor.

c) A cada país, asociarle su bandera.

d) A cada número entero, asociarle su cuadrado.

e) A cada individuo asociarle su nombre de pila.

f) Asociar a cada automóvil de una misma marca el número de serie de su motor.

SOLUCIÓN:

a) La asociación define una función que no es inyectiva, pues habrá más de una persona que tenga el mismo año de nacimiento.

b) No define una función inyectiva, ya que a todo libro se le asocia el mismo nombre.

c) Sí define una función inyectiva, dado que no hay dos banderas iguales.

d) No es una función inyectiva porque dos enteros distintos tienen el mismo cuadrado; por ejemplo 4 y -4 .

e) No es inyectiva, pues varías personas pueden tener el mismo nombre.

f) Sí es inyectiva, a cada automóvil le corresponde un número distinto de los demás.

1.30 Escribir en el paréntesis de la derecha una "V" si la aseveración correspondientes es verdadera ó una "F" si es falsa:

a) Las funciones inyectivas siempre son biyectivas. .... ( )

b) El dominio de toda función suprayectiva es IR .... ( )

c) Las funciones biyectivas siempre son inyectivas .... ( )

d) Las funciones inyectivas siempre son suprayectivas. .... ( )

e) El dominio de toda función biyectiva es IR .... ( )

f) Las funciones suprayectivas siempre son biyectiva. .... ( )

g) El recorrido de toda función inyectiva es IR .... ( )

h) La función $f: IR \rightarrow IR$, con $f(x) = 2x^2 + 3$, es inyectiva...... ( )

i) La función $f: IR \rightarrow IR$, si $f(x) = x^3 - 1$, es biyectiva............ ( )

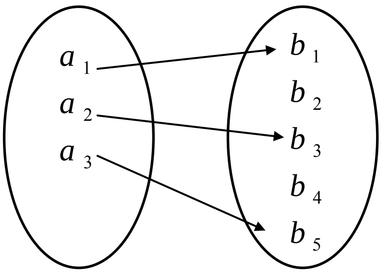
j) La función $f: IR \rightarrow IR^+$, con $f(x) = x^3 - 4$, es suprayectiva .. ( )

SOLUCIÓN:

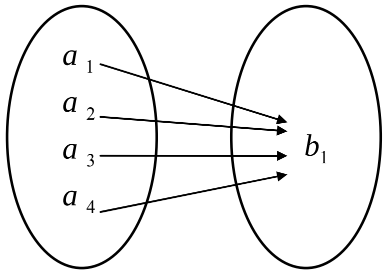
a) (F) b) (F) c) (V) d) (F) e) (F)
f) (F) g) (F) h) (F) i) (V) j) (V)

1.31 De las relaciones representadas por diagramas de Venn, indicar cuáles son funciones, y de éstas cuáles son inyectivas, suprayectivas y biyectivas.

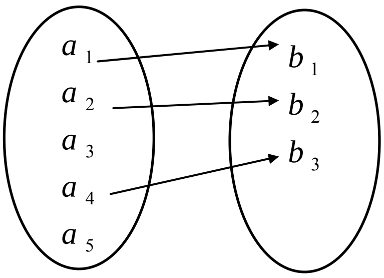
a)



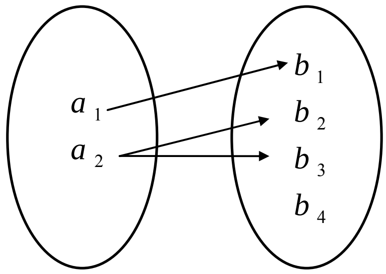
b)



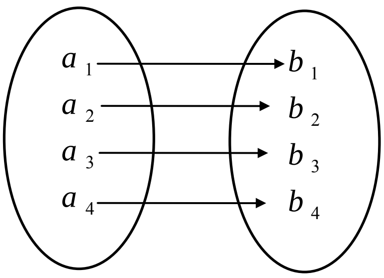
c)



d)



e)



SOLUCIÓN:

a) Es función, es inyectiva pero no es suprayectiva, no es biyectiva.

b) Es función, no es inyectiva, si es suprayectiva, no es biyectiva.

c) No es función.

d) No es función.

e) Es función, es inyectiva, es suprayecativa y es biyectiva.

I.32 Sean f y g dos funciones con reglas de correspondencia $y = f(x)$, $y = g(x)$ y dominios D_f y D_g respectivamente.

Escribir en el paréntesis de la derecha "V" si el concepto está escrito correctamente y "F" si está incorrecto:

a) La suma de las funciones f y g es:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ donde $x \in D$ y $D = D_f$ ( )

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ donde $x \in D$ y $D = D_f \cap D_g$ ( )

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ donde $x \in D$ y $D = D_f \cup D_g$ ( )

b) La diferencia de la función f menos la g es:

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ donde $x \in D$ y $D = IR$ ( )

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ donde $x \in D$ y $D = D_f \cup D_g$ ( )

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ donde $x \in D$ y $D = D_f \cap D_g$ ( )

c) El producto de las funciones f y g es:

$(f\,g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ donde $x \in D$ y $D = D_f \cap D_g$ ( )

$(f\,g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ donde $x \in D$ y $D \subset D_f$ ( )

$(f\,g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ donde $x \in D$ y $D_f \cup D_g$ ( )

d) El cociente de la función f entre la función g es:

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ donde $x \in D_f \cap D_g$ y $f(x) \neq 0$ ( )

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ donde $x \in D_f \cap D_g$ y $g(x) = 0$ ( )

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ donde $x \in D_f \cap D_g$ y $g(x) \neq 0$ ( )

e) La composición de la función f con la función g se puede escribir:

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ donde $D_{f\circ g} = \left\{x \;\middle|\; x \in D_g ,\ g(x) \in D_f \right\}$ ( )

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ donde $D_{f\circ g} = \left\{x \;\middle|\; x \in D_f ,\ g(x) \in D_g \right\}$ ( )

$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ donde $D_{f\circ g} = \left\{x \;\middle|\; x \in D_f ,\ g(x) \in D_g \right\}$ ( )

SOLUCIÓN:

a)	b)	c)	d)	e)
(F)	(F)	(V)	(F)	(V)
(V)	(F)	(F)	(F)	(F)
(F)	(V)	(F)	(V)	(F)

I.33 Sean las funciones:

$f = \{ (80, 10), (1, -3), (2, -6) \}$ y $g = \{ (-1, 2), (0, -5), (2, 0) \}$

escribir por extensión las funciones:

a) $f + g$ b) $f \cdot g$ c) $-g$ d) $f - g$ e) $\dfrac{f}{g}$

SOLUCIÓN:

El dominio de f es $D_f = \{ 80, 1, 2 \}$

El dominio de g es $D_g = \{ -1, 0, 2 \}$

La intersección de estos dominios es $D_f \cap D_g = \{ 0, 2 \}$

a) $D_{f+g} = \{ 0, 2 \}$; $f + g = \{ (0, 5), (2, -6) \}$

b) $D_{f \cdot g} = \{ 0, 2 \}$; $f \cdot g = \{ (0, -50), (2, 0) \}$

c) $D_{-g} = D_g \{ -1, 0, 2 \}$; $-g = \{ (-1, -2), (0, 5), (2, 0) \}$

d) $D_{f-g} = \{ 0, 2 \}$; $f - g = \{ (0, 15), (2, -6) \}$

e) $D_{\frac{f}{g}} = \{ 0 \}$; $\dfrac{f}{g} = \{ (0, -2) \}$

I.34 Sean las funciones f y g cuyas reglas de correspondencia son $f(x) = x - 5$, $g(x) = x^2 - 1$, obtener las siguientes funciones y sus dominios.

a) $f + g$ b) $f - g$ c) $f \cdot g$ d) $f \div g$ e) $\dfrac{g}{f}$

SOLUCIÓN:

El dominio de f es $D_f = IR$ y el g es $D_g = IR$ por lo cual $D_f \cap D_g = IR$

a) $(f+g)(x) = x-5+x^2-1 = x^2+x-6$ con $D_{f+g} = IR$

b) $(f-g)(x) = x-5-x^2+1 = -x^2+x-4$ con $D_{f-g} = IR$

c) $(fg)(x) = (x-5)\left(x^2-1\right) = x^3-5x^2-x+5$ con $D_{fg} = IR$

d) $\left(f \div g\right) = \dfrac{x-5}{x^2-1}$ con $D_{f \div g} = IR - \{-1, 1\}$

e) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{x^2-1}{x-5}$ con $D_{\frac{f}{g}} = IR - \{5\}$

I.35 Con las funciones de reglas de correspondencia $f(x) = x-5$; $g(x) = x^2-1$, obtener las funciones:

a) $(f \circ g)(x)$ y su dominio.

b) $(g \circ f)(x)$ y su dominio.

SOLUCIÓN:

a) $(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = x^2-1-5 = x^2-6$, $D_{f \circ g} = IR$

b) $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = (x-5)^2-1 = x^2-10x+24$, $D_{g \circ f} = IR$

1.36 Dadas las funciones f y g cuyas reglas de correspondencia son respectivamente $f(x) = +\sqrt{x}$, $g(x) = x^2+1$, obtener las siguientes funciones y sus dominios.

a) $f+g$ b) $f-g$ c) $f \cdot g$ d) $\dfrac{f}{g}$ e) $\dfrac{g}{f}$

SOLUCIÓN:

El dominio de f es $D_f = \{ x \mid x \geq 0 \}$ y el de g es $D_g = IR$ por lo tanto: $D_f \cap D_g = \{ x \mid x \geq 0 \}$

a) $(f + g)(x) = \sqrt{x} + x^2 + 1$; $D_{f+g} = \{ x \mid x \geq 0 \}$

b) $(f - g)(x) = \sqrt{x} - (x^2 + 1)$; $D_{f-g} = \{ x \mid x \geq 0 \}$

c) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x} \, (x^2 + 1) = x^2 \sqrt{x} + \sqrt{x}$; $D_{f \cdot g} = \{ x \mid x \geq 0 \}$

d) $\left(\dfrac{f}{g} \right)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$; $D_{\frac{f}{g}} = \{ x \mid x \geq 0 \}$

e) $\left(\dfrac{g}{f} \right)(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}$; $D_{\frac{g}{f}} = \{ x \mid x > 0 \}$

I.37 Para las funciones con regla de correspondencia $f(x) = + \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 1$, determinar las funciones:

a) $f \circ g$ y su dominio.

b) $g \circ f$ y su dominio.

SOLUCIÓN:

a) El recorrido de g es $R_g = \{ y \mid y \geq 1 \}$ así que $R_g \subset D_f$

$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ con $D_{f \circ g} = IR = D_g$

b) El recorrido de f es $R_f = \{ y \mid y \geq 0 \}$ así que $R_f \subset D_g = IR$

$(g \circ f)(x) = \left(\sqrt{x} \right)^2 + 1 = | x | + 1$ con $D_{g \circ f} = \{ x \mid x \geq 0 \} = D_f$

I.38 Dadas las funciones f y g cuyas reglas de correspondencia son respectivamente:

$$f\,(x) = x^2 - 1 \qquad \text{y} \qquad g\,(x) = \frac{x}{x-1}$$

obtener las siguientes funciones y sus dominios

a) $f + g$ b) $g - f$ c) $f \cdot g$ d) $g \div f$ e) $g \circ f$

SOLUCIÓN:

$D_f = IR$, $D_g = IR - \{1\}$, $D_f \cap D_g = IR - \{1\}$

a) $$(f+g)(x) = x^2 - 1 + \frac{x}{x-1} = \frac{x^2 - x^2 - x + 1 + x}{x-1} = \frac{x^3 - x^3 + 1}{x-1};$$

$D_{f+g} = IR - \{1\}$

b) $$(g-f)(x) = \frac{x}{x-1} - (x^2 - 1) = \frac{x - (x^2-1)(x-1)}{x-1}$$

$$= \frac{x - x^2 + x^2 + x - 1}{x-1} = \frac{-x^3 + x^2 + 2x - 1}{x-1},$$

$D_{g-f} = IR - \{1\}$

c) $$(f \cdot g)(x) = (x^2 - 1)\, x\, \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)\,x}{x-1} = (x+1)\,x = x^2 + x,$$

$D_{f \cdot g} = IR - \{1\}$

d) $$(g \div f)(x) = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x^2-1)(x-1)},$$

$D_{\frac{g}{f}} = IR - \{-1,\ 1\}$

e) $$(g \circ f)(x) = g\,(x^2 - 1) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1 - 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2}$$

$R_f = [-1, +\infty)$, para $g \circ f$ debe tenerse $x^2 - 1 \neq 1$, $x^2 \neq 2$,

$x \neq \pm\sqrt{2}$ luego $D_{g \circ f} = IR - \{-\sqrt{2},\ +\sqrt{2}\}$

I.39 Si $f(x)=\sqrt{x-1}$ y $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ son las reglas de correspondencia de dos funciones, obtener, si existen, las funciones siguientes y sus dominios.

a) $f \div g$ b) $g \div f$ c) $g \circ f$ d) $2f+\mathrm{I}$

SOLUCIÓN:

$D_f=[+1,+\infty)$, $D_g=(-\infty,-1]\cup[1,-\infty)$, luego: $D_f \cap D_g=[1,+\infty)$

a) $$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}\ ,\ D_{f\div g}=(1,+\infty)$$

b) $$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1}=\sqrt{x+1}\ ,\ D_{g\div f}=(1,+\infty)$$

c) $$(g\circ f)(x)=g\left(\sqrt{x-1}\right)=\sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{x-1-1}=\sqrt{x-2}$$

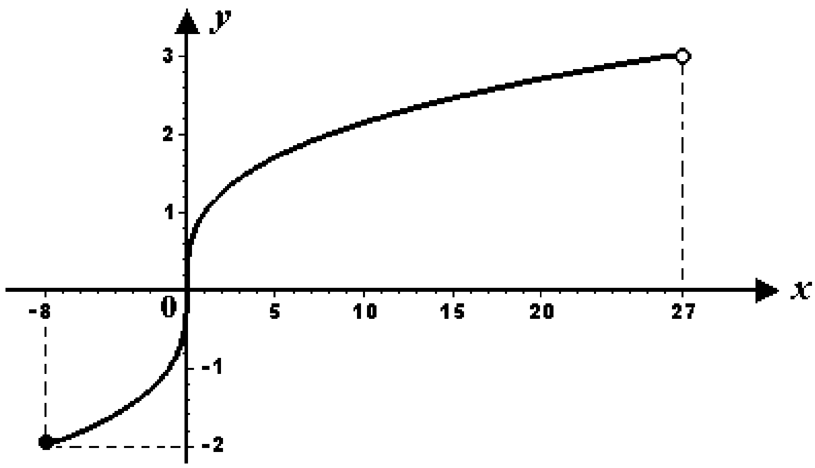
$R_f=[0,+\infty)$, como $D_g=\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right)$ debe tomarse $[1,+\infty)$, $f(x)=\sqrt{x-1}\geq 1$, $x-1\geq 1$, $x\geq 2$, entonces $D_{g\circ f}=[2,+\infty)$.

d) Téngase en cuenta que I es la función identidad: $\mathrm{I}(x)=x$ para la cual $R_{\mathrm{I}}=IR$.

$$(2f+\mathrm{I})(x)=2\sqrt{x-1}+x\ ,\qquad D_{2f+\mathrm{I}}=D_f\cap D_{\mathrm{I}}=[1,+\infty)\ .$$

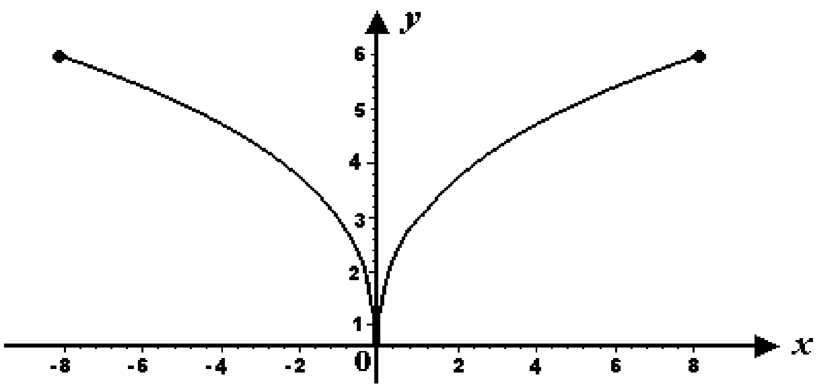
I.40 Dada la función: $f=\left\{(x\,,\ y \mid y=\sqrt[3]{x}\,,\ -8\le x<27\right\}$, trazar su gráfica, y escribir su dominio y recorrido. Indicar si es biunívoca.

SOLUCIÓN:
$D_f=[-8\,,\ 27\,)$
Se trata de una función biunívoca, así que el recorrido puede obtenerse con:
$f\,(-8\,)=\sqrt[3]{-8}=-2$; $f\,(\,27\,)=\sqrt[3]{27}=3$; $R_f=[-2\,,\ 3\,)$.
Es biunívoca porque cada valor de $y\in R_f$ corresponde a un sólo valor $x\in D_f$.



I.41 Sea la función: $f=\left\{(\,x\,,\ y\,)\;\middle|\; y=3\left|\sqrt[3]{x}\right|;\ x\in\left[-8\,,\ 8\,\right]\right\}$, obtener su dominio recorrido y gráfica. ¿Es biunívoca?

SOLUCIÓN:
$D_f=[-8\,,\ 8\,]$ y como $y\ge 0$ $f\,(-8\,)=f\,(8)=3(2)=6$. Entonces: $R_f=[\,0\,,\ 6\,]$. No es biunívoca ya que cada valor de "y" en el intervalo $(\,0\,,\ 6\,)$ corresponde a dos valores de "x" en $[\,(-8\,,\ 0\,)\cup(\,0\,,\ 8\,)\,]$.



I.42 Dada la función cuya regla de correspondencia es:

$$f\ (x) = 4 - \sqrt{25 - (\ x - 3\ )^2}$$

Determinar analíticamente su dominio, trazar su gráfica y escribir su recorrido. ¿Es biunívoca?

SOLUCIÓN:

De la ecuación: $f\ (x) = 4 - \sqrt{25 - (\ x - 3\ )^2}$ .... (1)

$f\ (x) \in IR$ si $25 - (x-3)^2 \geq 0$; $(x-3)^2 \leq 25$; $|\ x-3\ | \leq 5$...........(2)

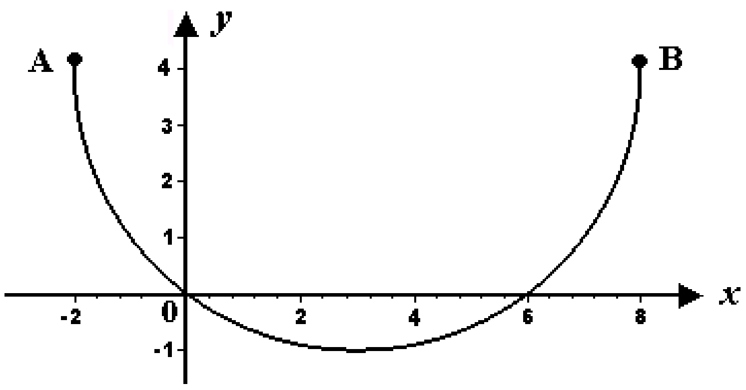
Si $x - 3 \geq 0$ o bien si $x \geq 3$, $|\ x-3\ | = x - 3$, entonces (2) queda:
$x - 3 \leq 5$ o sea $x \leq 8$ ....(3)

Si $x - 3 < 0$ o bien $x < 3$, $|\ x-3\ | = -x + 3$, entonces (2) queda:
$-x + 3 \leq 5$; $x - 3 \geq -5$; o sea $x \geq -2$ .... (4)

De (3) y (4): $-2 \leq x \leq 8$, luego $D_f = \{\ x \mid x \in [\ -2\ ,\ 8\ ]\ \}$

De (1), haciendo $f\ (x) = y$, queda $y - 4 = -\sqrt{25 - (\ x-3\ )^2}$, luego:
$(\ y-4\ )^2 = 25 - (\ x-3\ )^2$; $(\ x-3\ )^2 + (\ y-4\ )^2 = 25$, que representa una circunferencia de centro $C\ (\ 3\ ,\ 4\ )$ y radio $r = 5$, de la cual el arco "inferior" entre los puntos $A\ (\ -2\ ,\ 4\ )$ y $B\ (\ 8\ ,\ 4\ )$ es la gráfica de la función.

El recorrido de la función es: $R_f = \{\ y \mid y \in [\ -1\ ,\ 4\ ]\ \}$. No es biunívoca ya que cada valor $y \in (\ -1,\ 4\ ]$ corresponde a dos valores de $x \in [\ -2\ ,\ 3\ ) \cup (\ 3\ ,\ 8\ ]$



I.43 Investigar si la función $f = \left\{ (x, y) \;\middle|\; y = 2\sqrt{9-x^2}\,, \quad x \geq 0 \right\}$ es biunívoca. En caso afirmativo determinar su función inversa, los dominios y recorridos de ambas funciones; trazar sus gráficas.

SOLUCIÓN:

La regla de correspondencia puede transformarse como sigue:

$$y = 2\sqrt{9-x^2} \;;\quad y^2 = 4(9-x^2)\;;\quad y^2 = 36 - 4x^2\;;\quad 4x^2 + y^2 = 36$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Que corresponde a una elipse de centro $C(0, 0)$, $a = 6$, $b = 3$ y cuyo eje focal está sobre el eje de las ordenadas. Como $y \geq 0$, $x \geq 0$, la gráfica es el arco de dicha elipse localizado en el primer cuadrante del sistema de referencia. Cada valor de "y" corresponde a un solo valor de "x", entonces la función sí es biunívoca.

El dominio de f es $D_f = \{ x \mid 0 \leq x \leq 3 \}$ y su recorrido $R_f = \{ y \mid 0 \leq y \leq 6 \}$

La función inversa de f es:

$$f^{-1} = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x = 2\sqrt{9 - y^2} \;;\; y \geq 0 \right\}$$

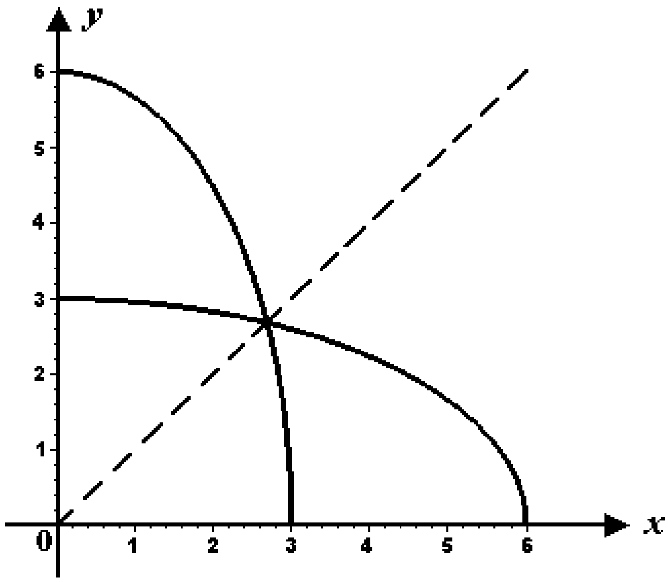
donde la regla de correspondencia está en forma implícita transformada a la forma canónica de la ecuación de una elipse

$$x^2 = 4(9 - y^2)\,;\qquad x^2 = 36 - 4y^2\,;\qquad x^2 = 4y^2 - 36\,;\qquad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

y despejando "y" para tenerla, en forma explícita:

$$4y^2 = 36 - x^2 \;;\qquad y^2 = \frac{1}{4}(36 - x^2)\;;\qquad y = \frac{1}{2}\sqrt{36 - x^2}$$

La función inversa es: $f^{-1} = \left\{ (x\ ,\ y) \,\middle|\, y = \frac{1}{2}\sqrt{36 - x^2}\ ,\ x \geq 0 \right\}$. El dominio y el recorrido de f^{-1} son: $D_f^{-1} = \{ x \mid 0 \leq x \leq 6 \}$, $R_f^{-1} = \{ y \mid 0 \leq y \leq 3 \}$.



I.44 Dada la función $f = \left\{ (x\ ,\ y) \,\middle|\, y = 9 - \sqrt{36 - (x-3)^2}\ ;\ 3 < x < 9 \right\}$.

Investigar si es biunívoca. En caso afirmativo determinar su función inversa, los dominios y recorridos de ambas funciones; trazar sus gráficas.

SOLUCIÓN:

La regla de correspondencia de f puede escribirse:

$$y - 9 = -\sqrt{36 - (x-3)^2}\ ;\quad (y-9)^2 = 36 - (x-3)^2;\qquad (x-3)^2 + (y-9)^2 = 36$$

que es la ecuación de una circunferencia de centro $C\,(3\ ,\ 9)$ y radio $r = 6$

Para $x_1 = 3$, $y_1 = 3$ y si $x_2 = 9$, $y_2 = 9$, entonces la gráfica de f es el arco de la circunferencia comprendido entre los puntos $A\,(3\ ,\ 3)$ y $B\,(9\ ,\ 9)$.

El dominio de f es: $D_f = \{ x \mid 3 < x < 9 \}$ y su recorrido es $R_f = \{ y \mid 3 < y < 9 \}$

Cada valor de $y \in R_f$ corresponde a un solo valor de $x \in D_f$, así que f es biunívoca.

La función inversa de f es:

$$f^{-1} = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x = 9 - \sqrt{36-(y-3)^2}, \; 3 < y < 9 \right\}$$

En esta expresión la regla de correspondencia está en forma implícita. Despejando "y" se tiene:

$x-9 = \sqrt{36-(y-3)^2}$; $(x-9)^2 = 36-(y-3)^2$; $(x-9)^2 + (y-3)^2 = 36$

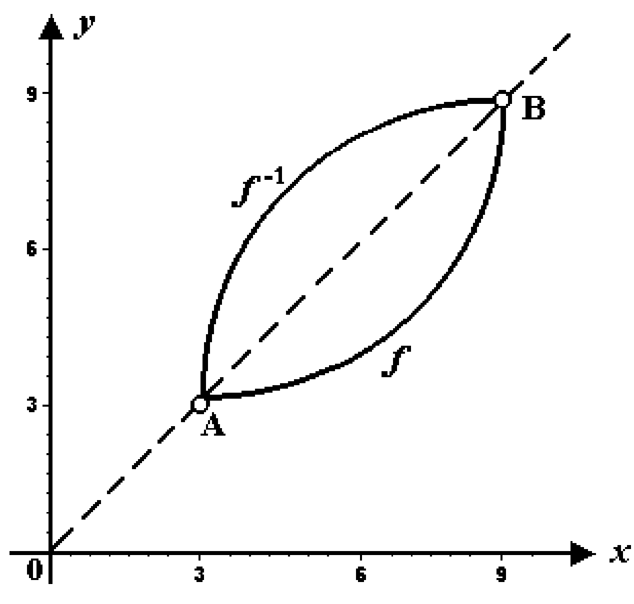
$y-3 = \sqrt{36-(x-9)^2}$ $\qquad y = 3 + \sqrt{36-(x-9)^2}$

la función inversa puede escribirse:

$$f^{-1} = \left\{ (x, y) \;\middle|\; y = 3 + \sqrt{36-(y-9)^2} \; ; \; 3 < x < 9 \right\}$$

siendo $D_{f^{-1}} = \{ x \mid 3 < x < 9 \}$ y $R_{f^{-1}} = \{ y \mid 3 < y < 9 \}$

La gráfica de f^{-1} es un arco de la circunferencia de centro $C(9, 3)$ y radio $r = 6$



I.45 Investigar si la función:

$$f = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 4(x-2)^2 - 9(y-3)^2 = 36 ,\; x \geq 5 ,\; y \geq 3 \right\}$$

es biunívoca. Si lo es, obtener su función inversa, los dominios y recorridos de ambas funciones; trazar sus gráficas.

SOLUCIÓN:

La regla de correspondencia de f puede escribirse:

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

que es la ecuación de una hipérbola de centro $C(2, 3)$ eje focal paralelo al eje de las abscisas, $a = 3$, $b = 2$, uno de cuyos vértices es $V(5, 3)$. Como $x \geq 5$ y $y \geq 3$, sí se tiene una función biunívoca cuyo dominio es $D_f = \{ x \mid x \geq 5 \}$ y cuyo recorrido es $R_f = \{ y \mid y \geq 3 \}$.

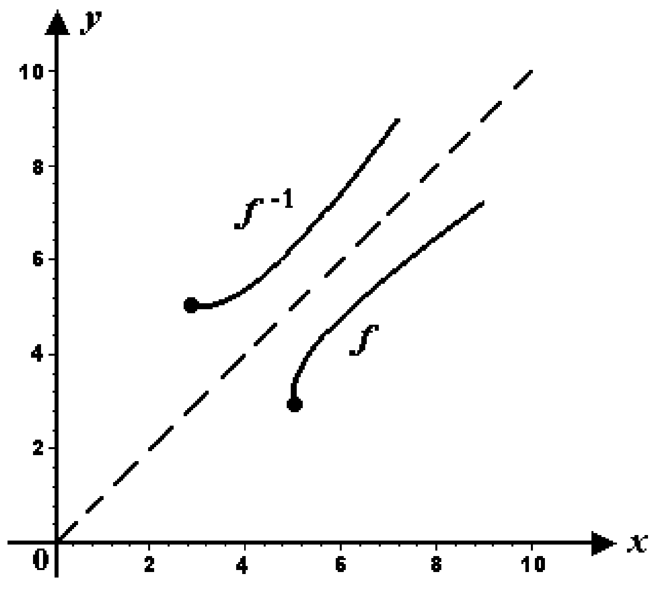
La función inversa de f es:

$$f^{-1} = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 4(y-2)^2 - 9(x-3)^2 = 36 ,\; x \geq 3 ,\; y \geq 5 \right\}$$

para la cual $D_{f^{-1}} = \{ x \mid x \geq 3 \}$, $R_{f^{-1}} = \{ y \mid y \geq 5 \}$.

Las reglas de correspondencia de ambas funciones en forma explícita son:

$$f(x) = 3 + \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^2 - 9} , \qquad f^{-1}(x) = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{(x-3)^2 + 4}$$

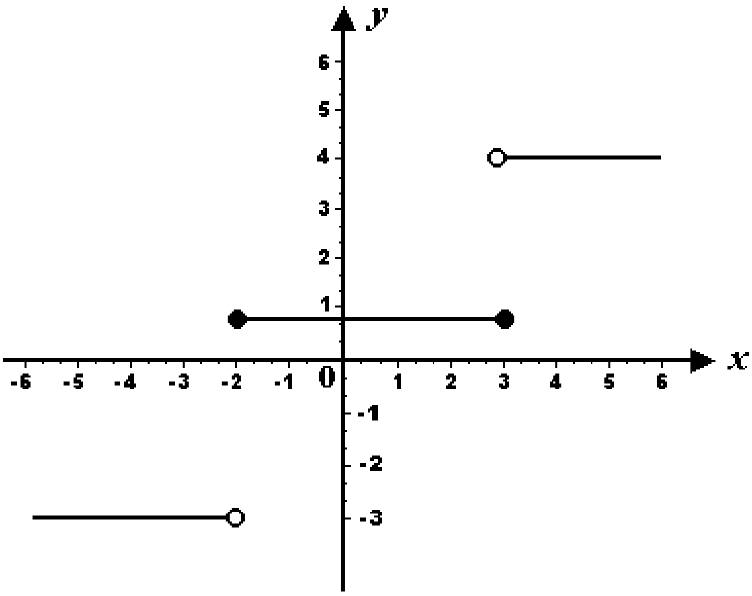


I.46 Para la siguiente función dada por tres reglas de correspondencia, trazar la gráfica y escribir el dominio y el rango o recorrido:

$$f(x)=\begin{cases} -3 & si \quad x<-2 \\ 1 & si \quad -2\le x\le 3 \\ 4 & si \quad x>3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Las tres reglas de correspondencia son ecuaciones de rectas paralelas al eje de las abscisas. El dominio de la función es: $D_f=\{x \mid x\in IR\}$, el rango o recorrido es: $R_f=\{-3,\ 1,\ 4\}$.



I.47 Trazar la gráfica de la siguiente función y determinar su dominio y su rango o recorrido.

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{4}{x} & si \quad x\in(-\infty,\ -1) \\ (x-1)^2 & si \quad x\in[-1,\ 2] \\ \dfrac{x}{2}+2 & si \quad x\in(2,\ +\infty) \end{cases}$$

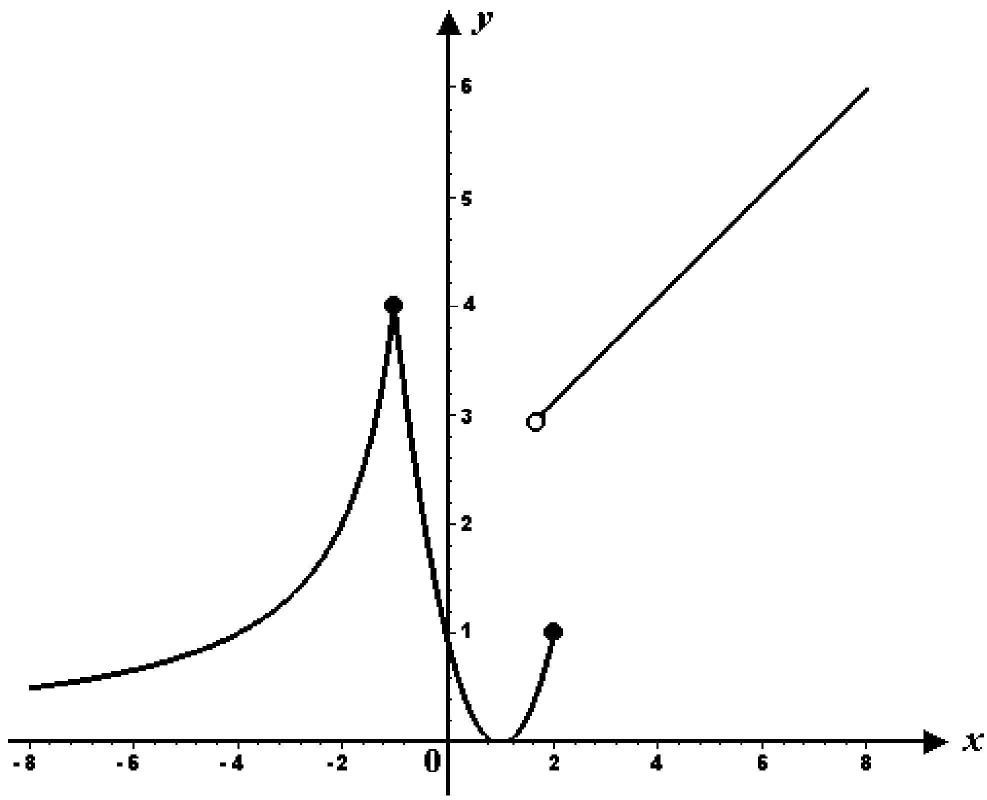
SOLUCIÓN:

La gráfica está compuesta de tres partes.

La primera parte es un arco de la hipérbola de ecuación: $y = -\frac{4}{x}$, que es equilátera y tiene como asíntotas a los ejes coordenadas y que se localiza en el 2^{o} y en el 4^{o} cuadrantes. Por el intervalo especificado para la primera regla de correspondencia, la gráfica es un arco de la rama de la hipérbola que se encuentra en el 2^{o} cuadrante.

Para la segunda regla de correspondencia, la gráfica es un arco de la parábola de ecuación $y = (x-1)^2$, cuyo vértice es el punto $V(1, 0)$ y que vuelve su concavidad hacia arriba; su eje focal es la recta $x = 1$.

La tercera regla de correspondencia $y = \frac{x}{2} + 2$ es la ecuación de una recta de pendiente $m = \frac{1}{2}$ y ordenada en el origen. El dominio de la función es: $D_f = \{ x \mid x \in IR \}$. El rango o recorrido de la función es: $R_f = \{ y \mid y \geq 0 \}$



I.48 Para la función cuyas reglas de correspondencia son:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & si \quad x \in [-5, -3) \cup (3, 5] \\ 4 & si \quad x \in [-3, 3] \end{cases}$$

determinar el dominio, recorrido y trazar la gráfica.

SOLUCIÓN:

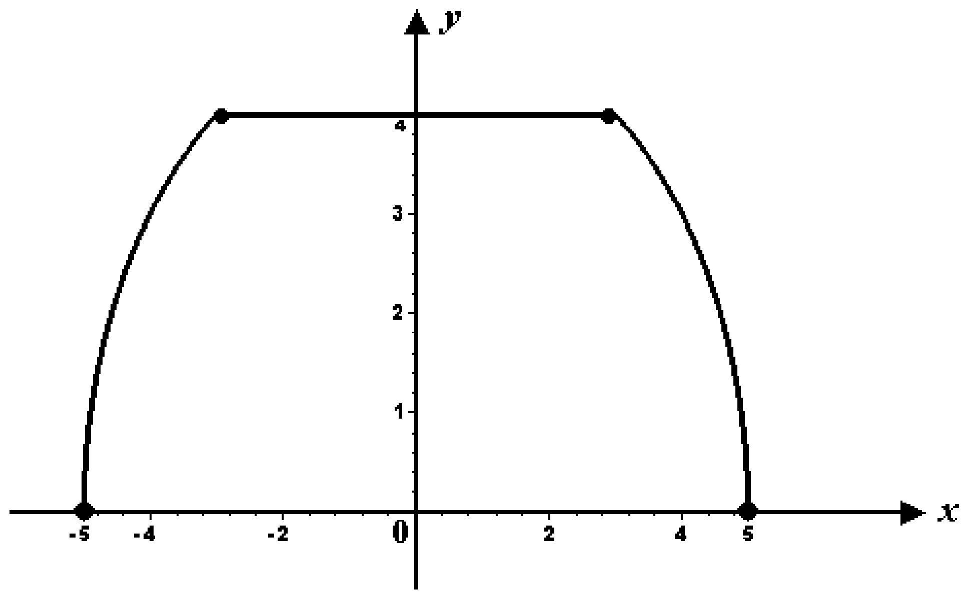
Para la primera regla de correspondencia:

$$y = \sqrt{25 - x^2}, \qquad y^2 = 25 - x^2, \qquad x^2 + y^2 = 25$$

que corresponde a una circunferencia de centro $C(0, 0)$ y radio $r = 5$.

Para la segunda regla de correspondencia $y = 4$ que representa una recta paralela al eje de las abscisas y ordenada 4.

El dominio de la función es $D_f = [-5, 5]$ y su recorrido es $R_f = [0, 4]$.



I.49 Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & si \quad -3 \le x < 0 \\ \dfrac{2\,|\,x-3\,|}{x-3} & si \quad 0 \le x < 6 \end{cases}$$

Escribir su dominio y recorrido. Trazar su gráfica.

SOLUCIÓN:

Para la primera regla de correspondencia, la gráfica es un segmento de la recta, $y=-x-2$ de pendiente $m=-1$ y ordenada en el origen $b=-2$.

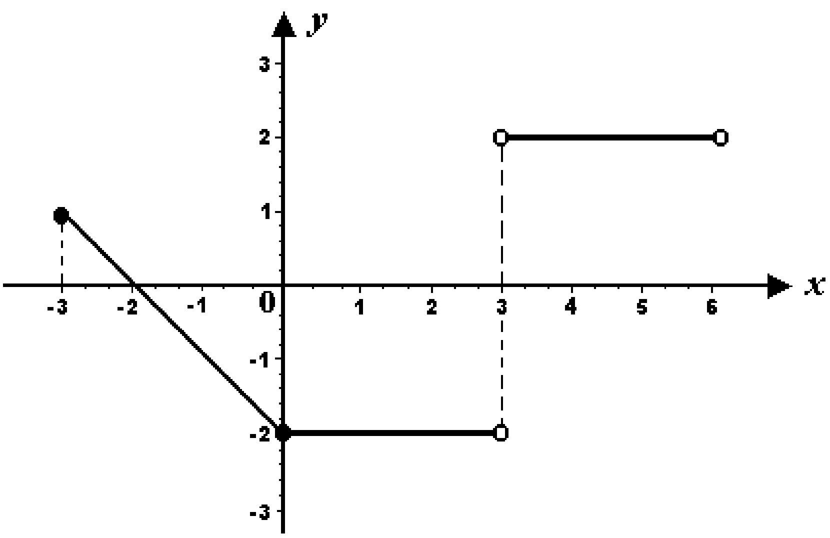
Para la segunda regla de correspondencia los valores de y, constantes son $y_1=-2$ si $x\in[\,0\,,\ 3\,)$ y $y_2=2$ si $x\in(\,3\,,\ 6\,)$

$$si \quad x<3\,, \quad \frac{2\,(\,3-x\,)}{x-3}=-2$$

$$si \quad x>3\,, \quad \frac{2\,(\,x-3\,)}{x-3}=2$$

La función no está definida en $x_1=3$

El dominio es: $D_f=[\,-3\,,\ 3\,)\cup(\,3\,,\ 6\,)$ y el recorrido es: $R_f=[\,-2\,,\ 1\,]\cup\{\,2\,\}$



I.50 Determinar el dominio, recorrido y trazar la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & si \quad -3 \le x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & si \quad 0 < x \le 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

La primera regla de correspondencia puede escribirse:

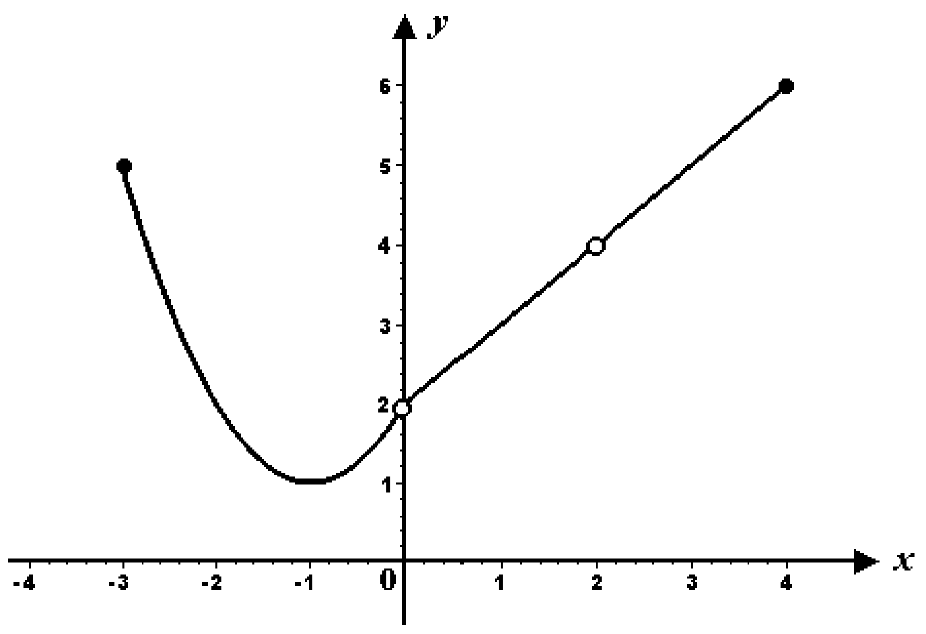
$$y = x^2 + 2x + 1 + 1 \; ; \qquad y - 1 = (x + 1)^2$$

que es la de una parábola de vértice $V(-1, 1)$, parámetro $p = \frac{1}{4}$ y que se abre hacia arriba.

La segunda regla, si $x \ne 2$ puede escribirse: $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$ que corresponde a una recta pendiente $m = 1$ ordenada en el origen $b = 2$ y que no contiene al punto $P(2, 4)$. El dominio de la función es:

$D_f = [-3, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 4]$ o bien $D_f = \{ x \mid x \in [-3, 4], x \ne 0, x \ne 2 \}$

El recorrido es $R_f = [1, 6]$.



I.51 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & si \quad x \in (-4, 1) \\ -x^2 + 2x + 2 & si \quad x \in (1, 4] \end{cases}$$

Escribir su dominio y recorrido. Trazar su gráfica.

SOLUCIÓN:

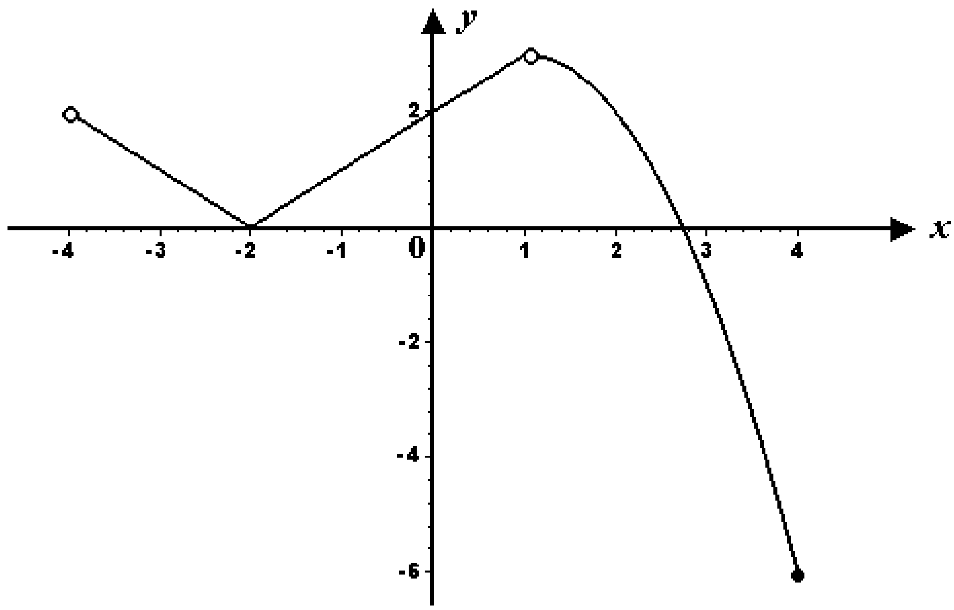
Para la primera regla de correspondencia la gráfica esta formada por dos segmentos de recta de pendientes $m_1 = -1$ y $m_2 = 1$ que coinciden en el punto $P(-2, 0)$.

La segunda regla de correspondencia se puede escribir:

$$y = -x^2 + 2x + 2; \qquad y = -(x^2 - 2x + 1) + 3; \qquad y - 3 = -(x-1)^2$$

que es la de una parábola de vértice $V(1, 3)$, parámetro $p = -\frac{1}{4}$ y se abre hacia abajo.

El dominio de la función es: $D_f = (-4, 1) \cup (1, 4]$ o bien $D_f = \{ x \mid -4 < x \leq 4, \ x \neq 1 \}$ y su recorrido es $R_f = [-6, 3)$.



I.52 Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x\notin[-1,\ 7] \\ 2-\frac{3}{4}\sqrt{7+6x-x^2} & si \quad x\in(-1,\ 7)\end{cases}$$

Trazar su gráfica y determinar su dominio y recorrido.

SOLUCIÓN:

La segunda regla de correspondencia se puede transformar:

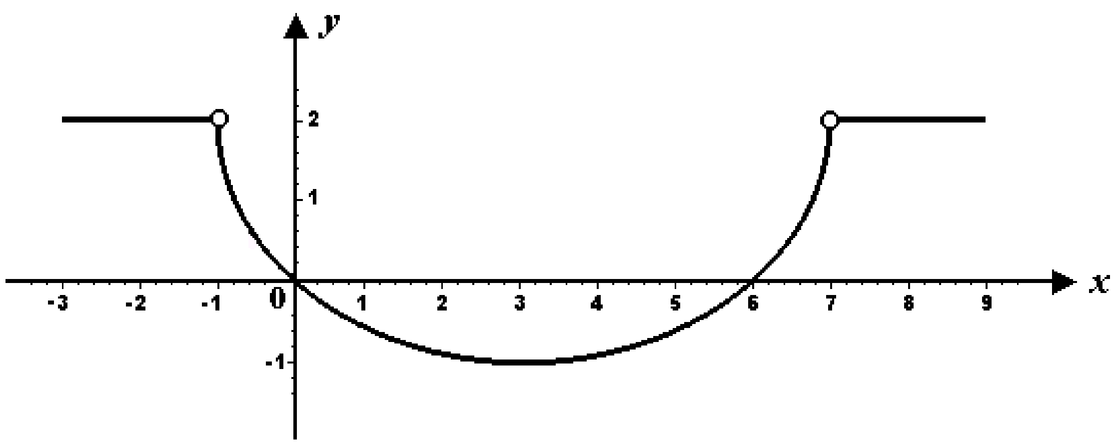
$$y=2-\frac{3}{4}\sqrt{7+6x-x^2} \quad ; \quad y-2=-\frac{3}{4}\sqrt{-(x^2-6x+9)+7+9}$$

$$4(y-2)=-3\sqrt{16-(x-3)^2} \quad ; \quad 16(y-2)^2=144-9(x-3)^2$$

$$9(x-3)^2+16(y-2)^2=144 \quad ; \quad \frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

que corresponde a una elipse de centro $C(3,\ 2)$, $a=4$, $b=3$ y eje focal paralelo al eje de las abscisas.

El dominio de la función es: $D_f=\{x \mid x\in IR,\ x\neq -1,\ x\neq 7\}$ y el recorrido es $R_f=\{y \mid -1\le y\le 2\}$.



I.53 Trazar la gráfica y determinar el dominio y recorrido de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad -2<x<1 \\ (x-2)^3+1 & si \quad 1\le x\le 3.5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

La primera regla de correspondencia tiene como gráfica un arco de la parábola $y+1=x^2$ de vértice $V(0,-1)$, parámetro $p=\frac{1}{4}$ y que se abre hacia arriba.

Tabulando se puede obtener la gráfica de la segunda regla de correspondencia:

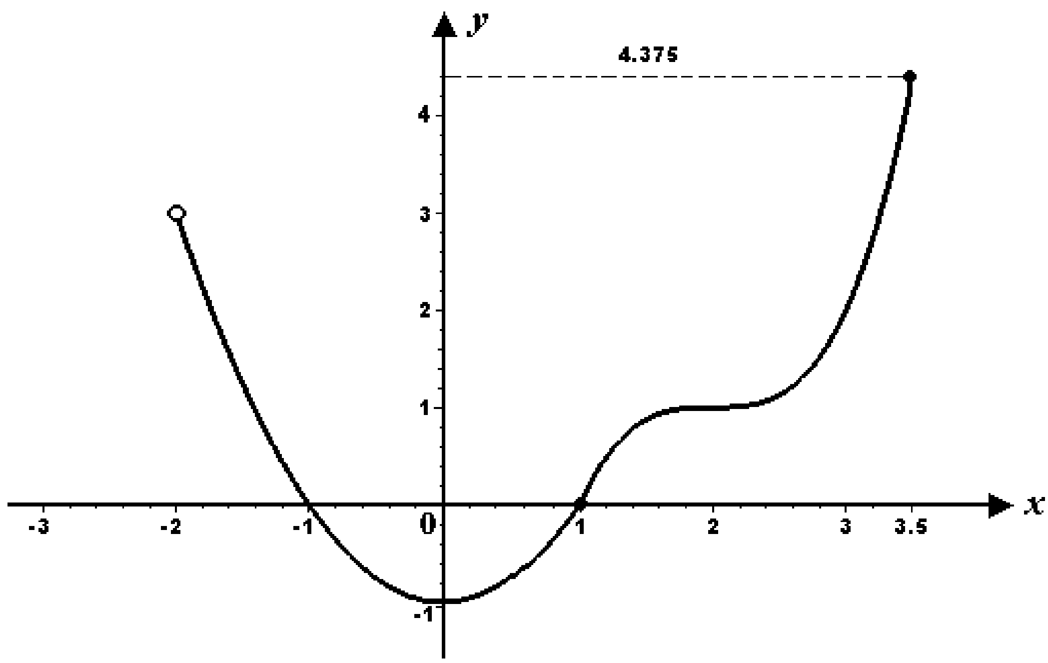
$$y=(x-2)^3+1$$

El dominio de la función es $D_f=\{x \mid -2<x\le 3.5\}$

El menor valor que toma y es $y_1=f(0)=0-1=-1$

y el mayor de y es $y_2=f(3.5)=4.375$

El recorrido de la función es $R_f=\{y \mid -1\le y\le 4.375\}$



I.54 Dadas las ecuaciones: $x = t + 2$, $y = t^2 + 3t$, indicar si determinan paramétricamente una función. En caso afirmativo obtener el dominio, recorrido y gráfica de la función.

SOLUCIÓN:

$x = t + 2$ .... (1)

$y = t^2 + 3t$ ....(2)

El conjunto de valores reales del parámetro "t" que hacen que "x" sea real $D_x = IR$ y el que hace que "y" sea real es $D_y = IR$. La intersección de estos dos conjuntos es IR , así que para cada valor real de "t" hay una pareja de números reales (x , y) de una función.

Resolviendo como simultánea las ecuaciones (1) y (2) se puede eliminar el parámetro "t" obteniendo en forma cartesiana la regla de correspondencia de la función.

De (1) : $t = x - 2$

sustituyendo este valor en (2) :

$y = (x - 2)^2 + 3 (x - 2) = x^2 - 4x + 4 + 3x - 6 = x^2 - x - 2$

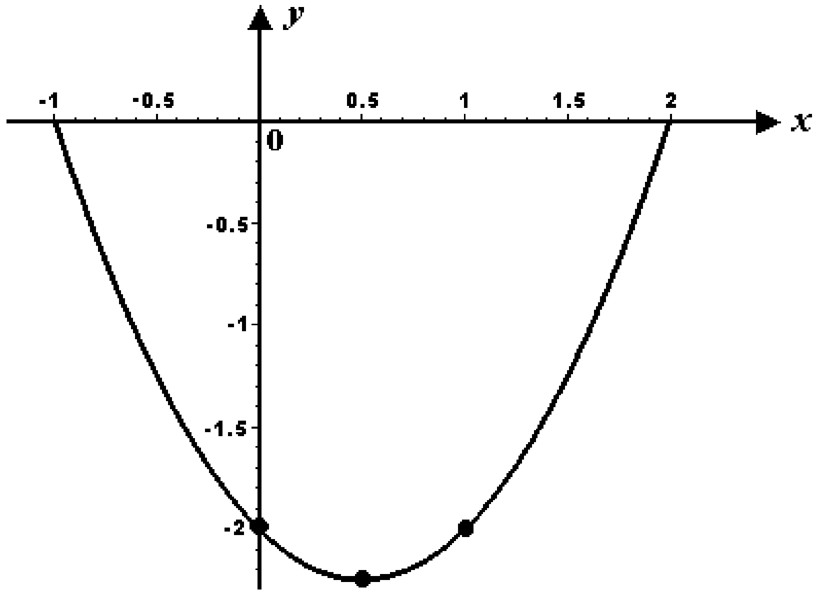
$y = x^2 - x - 2$ es la ecuación cartesiana en forma explícita de la regla de correspondencia, que se puede transformar como sigue:

$$y = x^2 - x + \frac{1}{4} - 2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} \quad ; \qquad \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 = y + \frac{9}{4}$$

Esta es la ecuación de una parábola con vértice $V\left(\frac{1}{2} , - \frac{9}{4} \right)$ que abre su concavidad hacia arriba.

El dominio de la función es: $D_f = IR$.

El rango o recorrido de la función es: $R_f = \left\{ y \;\middle|\; y \geq -\frac{9}{4} \right\}$



I.55 Sean las ecuaciones: $x = +\sqrt{t-3}$; $y = +\sqrt{4-t}$. Investigar si son las ecuaciones paramétricas de una función. Si lo son, obtener el dominio, recorrido y gráfica de la función.

SOLUCIÓN:

$x = +\sqrt{t-3}$ ....(1)

$y = +\sqrt{4-t}$ ....(2)

El conjunto de valores reales del parámetro "t" que hacen que "x" sea real es: $D_y \left\{ t \mid t \in IR ,\ t \geq 3 \right\}$ y el conjunto de valores de "t" que hace que "x" y "y" sean reales simultáneamente es: $D_x \cap D_y = \left\{ t \mid t \in IR ,\ 3 \leq x \leq 4 \right\}$.

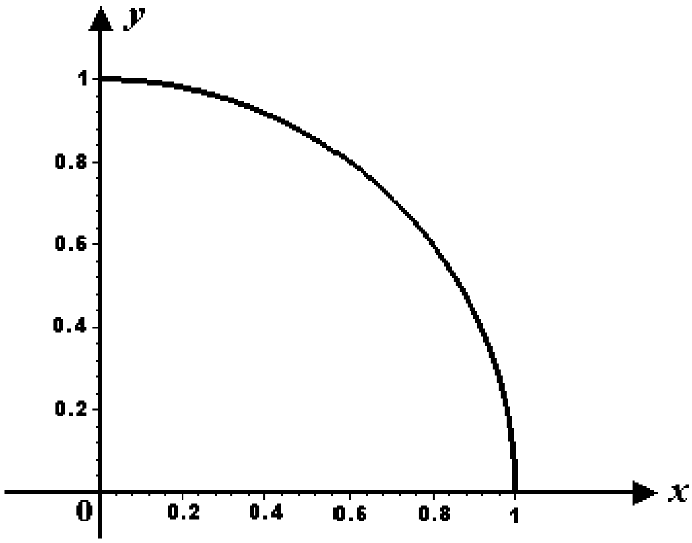
Las ecuaciones dadas sí determinan paramétricamente una función f , cuya regla de correspondencia en forma cartesiana puede obtenerse eliminando el parámetro "t" al resolver como simultáneas las ecuaciones (1) y (2) .

De $(1):\ t = x^2 + 3$ y de $(2):\ t = y^2 + 4$ luego: $x^2 + 3 = -y^2 + 4$; $x^2 + y^2 = 1$. La función f puede escribirse:

$$f = \left\{ (x,\ y) \,\middle|\, x,\ y \in IR,\ x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$$

La gráfica es el arco de circunferencia de centro $C(0,\ 0)$, radio $r = 1$, que se localiza en el primer cuadrante del sistema cartesiano.

El dominio de la función es: $D_f = \{ x \mid 0 \leq x \leq 1 \}$ y el recorrido o rango de la función es: $R_f = \{ y \mid 0 \leq y \leq 1 \}$



1.56 Considerando las ecuaciones: $x = +\sqrt{4 - 2t}$; $y = -\sqrt{t - 5}$. Investigar si determinan paramétricamente una función. En caso afirmativo obtener el dominio, recorrido y gráfica de la función

SOLUCIÓN:

El conjunto de valores reales de "t" que hacen que "x" sea real se obtiene de la inecuación $4 - 2t \geq 0$ y es $D_x = \{ t \mid t \leq 2 \}$; los valores de "$t$" que hacen que "$y$" sea real es $D_y = \{ t \mid t \geq 5 \}$.

La intersección de estos dos conjuntos es el conjunto vacío: $D_x \cap D_y = \varnothing$, entonces las ecuaciones dadas no determinan: paramétricamente una función.

I.57 Investigar si las ecuaciones siguientes determinan una función en forma paramétrica. Si es así, obtener el dominio, recorrido y gráfica de la función:

$$x = 4 \cos\theta\,; \qquad y = 3\ sen\,\theta \qquad \text{con} \qquad y \geq 0$$

SOLUCIÓN:

Despejando $\cos\theta$ y $sen\,\theta$ de las ecuaciones dadas: $\cos\theta = \frac{x}{4}$; $sen\ \theta = \frac{y}{3}$

Elevando al cuadrado

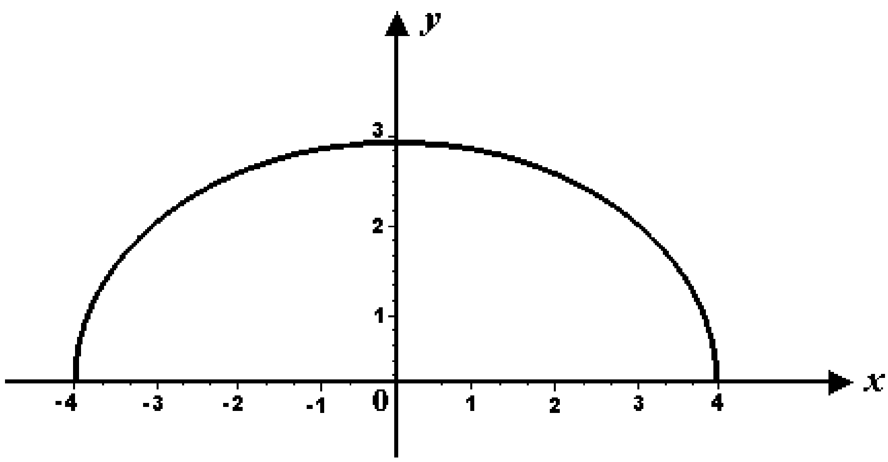
$$\cos^2\theta = \frac{x^2}{16}\ ; \qquad sen^2\,\theta = \frac{y^2}{9}$$

y como: $sen^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$ resulta:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

que es la ecuación cartesiana de una elipse de centro en el origen, eje focal sobre el eje de las abcisas, con $a = 4$, $b = 3$.

Las ecuaciones dadas representan paramétricamente una función cuyo dominio es $D_f = \{\, x \mid -4 \leq x \leq 4 \,\}$ y cuyo recorrido es $R_f = \{\, y \mid 0 \leq y \leq 3 \,\}$.



I.58 Escribir en cada paréntesis una "V" si la proposición es verdadera o una "F" si es falsa:

a) En una función constante, el dominio esta formado por un solo valor. (   )

b) Para la función identidad, $f(x_1) = f(x_1 + p)$, $p \in IR$ (   )

c) Si f es una función constante, el rango o recorrido consiste en un solo número real. (   )

d) En la función identidad, $f(x_0) = x_0$, $\forall\ x_0 \in IR$ (   )

e) Para una función constante f, se tiene que $f(x_0) = f(x_0 + p)$ $\forall\ x_0,\ p \in IR$ (   )

SOLUCIÓN:

a) (F)   b) (F)   c) (V)   d) (V)   e) (V)

I.59 Para cada una de las siguientes reglas de correspondencia, indicar si se trata de una función entera, racional o irracional:

a) $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5x - \sqrt{2}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 27}{x^2 + 4}$

c) $f(x) = (x^3 - 2)^{\frac{1}{2}}$; $f(x) \geq 0$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{x+4}}$; $x \neq -4$

e) $y = -\sqrt{3}\,x^2 + 4x - 6$

f) $y = (x-2)^2 + \frac{1}{x}$

g) $y = \sqrt{2x} + 7$

h) $y = \sqrt[3]{8x^2} - \sqrt{2x}$

SOLUCIÓN:

a) Entera

b) Racional

c) Irracional

d) Irracional

e) Entera

f) Racional

g) Irracional

h) Irracional

I.60 Escribir en el paréntesis de la derecha una "P" si la función correspondiente es par una "I" si es impar y una "N" si no es par ni impar. Todas las funciones son explícitas.

a) $y = 2x^2$ ( )

b) $y = 3x$ ( )

c) $y = |x|$ ( )

d) $y = 5$ ( )

e) $y = \frac{1}{x}$ ( )

f) $y = \frac{1}{x^2}$ ( )

g) $y = |x - 2|$ ( )

h) $y = 3 - x^2$ ( )

i) $y = -\sqrt{x + 1}$ ( )

j) $y = x^3$ ( )

SOLUCIÓN:

a) P;	b) I;	c) P;	d) P;	e) I;
f) P;	g) N;	h) P;	i) N;	j) I

I.61 Escribir en cada paréntesis el número de la expresión que complete correctamente cada afirmación:

a) El dominio de la función $y = sen\, x$ es ( )

b) El rango o recorrido de la función $y = csc\, x$ es ( )

c) El dominio de la función $y = tan\, x$ es ( )

d) El rango de la función $y = sen\, x$ es ( )

e) El dominio y el rango de la función $y = sec\, x$ son ( )

f) El dominio y el rango de la función $y = cot\, x$ son ( )

1. $(-1 , 1)$

2. $(-\infty , -1] \cup [1 , +\infty)$

3. $(-\infty , -1) \cup (1, +\infty)$

4. $[-1 , 1]$

5. $D = (-\infty , +\infty) , \ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi , \ n = 0 , \pm 1 ,...; \ R = (-\infty , -1] \cup [1 , +\infty)$

6. $(-\infty , +\infty)$

7. $(-\infty , +\infty) , \ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi , \ n = 0 , \pm 1 , \pm 2,...$

8. $D = (-\infty , +\infty) , \ x \neq n\pi , \ n = 0 , \pm 1 , \pm 2 ,...; \ R =(-\infty , +\infty)$

9. $D = (-\infty , +\infty) , \ x \neq n\pi + \frac{\pi}{2} , \ n = 0 , \pm 1 , \pm 2 ... ; \ R = (-\infty , +\infty)$

10. $(-\infty , 0) \cup (0 , +\infty) ; \ R = (-1 , 1)$

SOLUCIÓN:

a) (6) ; b) (2) ; c) (7) ;

d) (4) ; e) (5) ; f) (8) ;

I.62 Un terreno rectangular de $1,250\ m^2$ de área, uno de cuyos lados es un muro ya construido, se va a cercar con tela de alambre. Formular una función que permita calcular la longitud de la cerca en términos de la longitud "x" del lado paralelo al muro.

SOLUCIÓN:

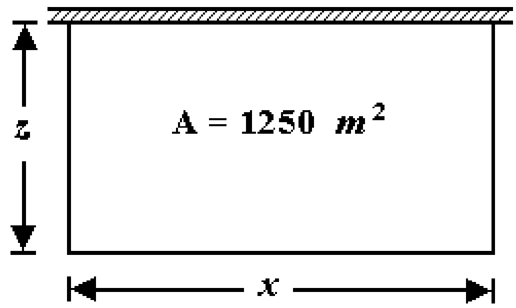
El área es: $x\,z = 1250$ .... (1)

La longitud de la cerca es: $\ell = x + 2z$

De (1) : $z = \dfrac{1250}{x}$, luego:

$$\ell = f(x) = x + \frac{2(1250)}{x}\ ;$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2500}{x}$$



I.63 Los lados iguales de un triángulo isósceles miden "b" unidades de longitud y forman con el lado desigual el ángulo "α" . Formular una función que permita obtener el área del triángulo en términos de "α" .

SOLUCIÓN:

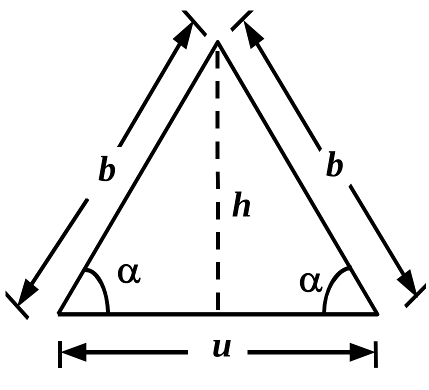
Sea "A" el área del triángulo, "h" su altura y "u" la longitud de su base

$A = \dfrac{u\,h}{2}$ ....(1) . De la figura se tiene que:

$sen\ \alpha = \dfrac{h}{b}$ y $cos\ \alpha = \dfrac{u}{2b}$ entonces $u = 2b\cos\alpha$.

Sustituyendo "u" y "h" en (1) $A = \dfrac{2\,b\ \cos\ \alpha\ (\,b\ sen\ \alpha)}{2}$

$A = b^2\ sen\,\alpha\ \cos\alpha$ o bien $A = \dfrac{1}{2}\ b^2\ sen\ 2\,\alpha$



1.64 En una circunferencia de $1.00\ m$ de radio está inscrito un rectángulo de dimensiones variables. Formular una función para determinar el área del rectángulo en términos de la longitud "z" de su base.

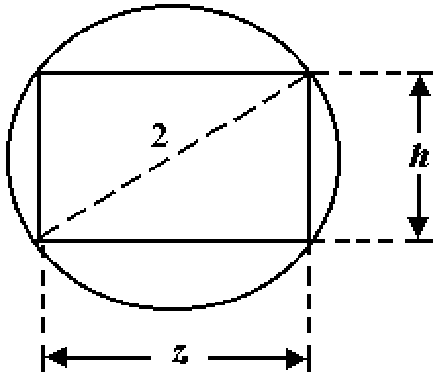
SOLUCIÓN:

Sea V el volumen del cono y "h" su altura.

$A = z\,h$ ....(1)

De la figura y por el Teorema de Pitágoras:

$z^2 + h^2 = 4$ por lo que $h = \sqrt{4 - z^2}$, sustituyendo en (1) $A = z\sqrt{4 - z^2}$



I.65 En una esfera de $30\ cm$ de radio está inscrito un cono de dimensiones variables. Formular una función que permita calcular el volumen del cono en términos de su radio "r"

SOLUCIÓN:

Sea V el volumen del cono y "h" su altura

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

De la figura: $h = 30 + y$

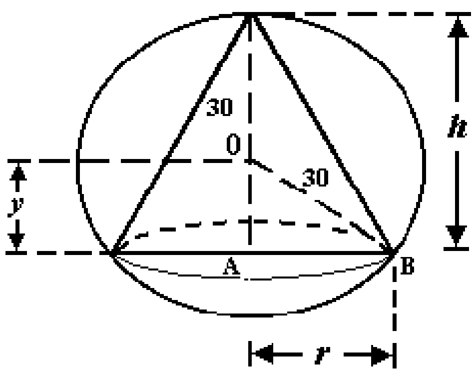
y en el triángulo rectángulo $0AB$:

$$y^2 = (30)^2 - r^2$$

luego: $y = \sqrt{900 - r^2}$

por lo cual $h = 30 + \sqrt{900 - r^2}$

Entonces: $V = \frac{1}{3}\pi r^2\left(30 + \sqrt{900 - r^2}\right)$



I.66 Se construirá un tanque prismático de base cuadrada con tapa, empleando un total de $10\,m^2$ de placa de acero. Formular una función que permita calcular la capacidad del tanque en términos de la longitud "x" del lado de su base.

SOLUCIÓN:

Sea V la capacidad del tanque y h su altura

$$V = x^2 h$$

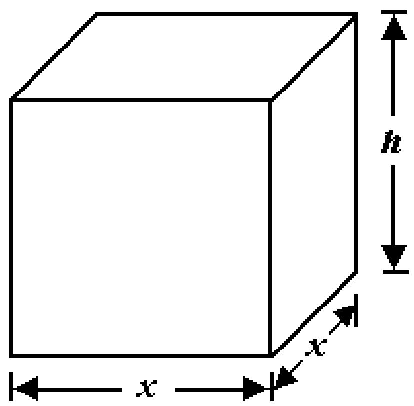
El área de placa es: $2x^2 + 4xh = 10$

Despejando: $h = \dfrac{10 - 2x^2}{4x} = \dfrac{5 - x^2}{2x}$

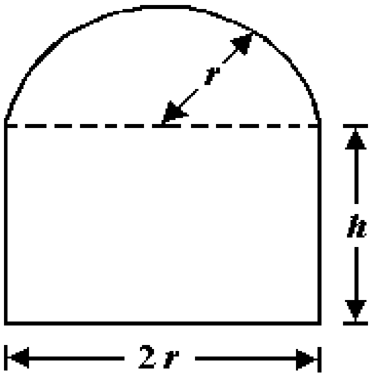
Sustituyendo este valor en V:

$$V = x^2 \left(\frac{5 - x^2}{2x} \right) = \frac{x}{2} \left(5 - x^2 \right)$$

$$V = \frac{1}{2} \left(5x - x^3 \right)$$



I.67 Se requiere construir un túnel cuya sección se representa en la figura. Por restricciones de construcción dicha sección debe tener un perímetro igual a $30\ m$. Formular una función para determinar el área variable "y" de la sección en términos únicamente de "r" .



SOLUCIÓN:

El área de la sección es: $y = 2rh + \frac{\pi r^2}{2}$ ....(1)

El perímetro es: $2r + 2h + \pi r = 30$

Despejando h : $2h = 30 - 2r - \pi r$, $h = 15 - r - \frac{\pi r}{2}$

Sustituyendo h en (1) : $y = 2r\left(15 - r - \frac{\pi r}{2}\right) + \frac{\pi r^2}{2}$

$$y = (30 - 2r - \pi r)\, r + \frac{\pi r^2}{2} = 30r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{2} = 30r - 2r^2 - \frac{\pi r^2}{2}$$

$$y = 30r - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) r^2$$

I.68 Tres lados de un trapecio miden $10\ cm$ cada uno. Formular una función que determine el área del trapecio en términos del cuarto lado "x".

SOLUCIÓN:

Sea "y" el área del trapecio y "h" su altura

$$y = \frac{x+10}{2}\,h$$

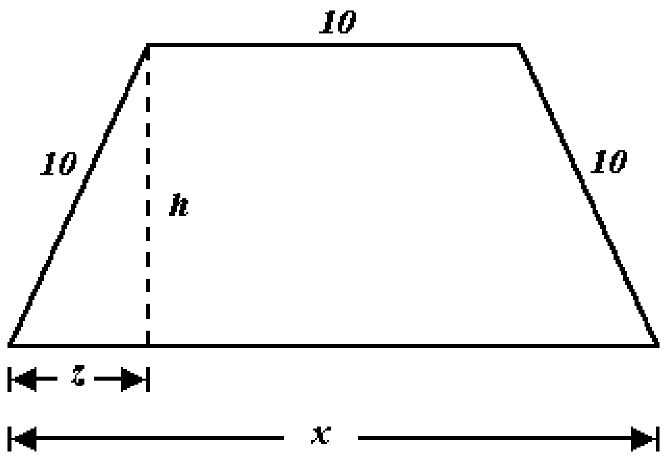
De la figura: $z = \frac{x-10}{2}$ y por el Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = (10)^2 - z^2 = 100 - \left(\frac{x-10}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 100 - \frac{x^2 - 20x + 100}{4} = \frac{400 - x^2 + 20x - 100}{4} = \frac{1}{4}\left(300 + 20x - x^2\right)$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{300 + 20x - x^2}$$

$$y = \frac{x+10}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{300 + 20x - x^2} \qquad y = \frac{x+10}{4}\sqrt{300 + 20x - x^2}$$



I.69 Formular una función que determine el área de un triángulo isósceles de dimensiones variables inscrito en una circunferencia de $1.00\ m$ de radio, en términos de la longitud "x" de la base del triángulo.

SOLUCIÓN:

Sea "y" el área del triángulo.

$y = \frac{1}{2} x h$ ....(1)

De la figura y por el Teorema de Pitágoras:

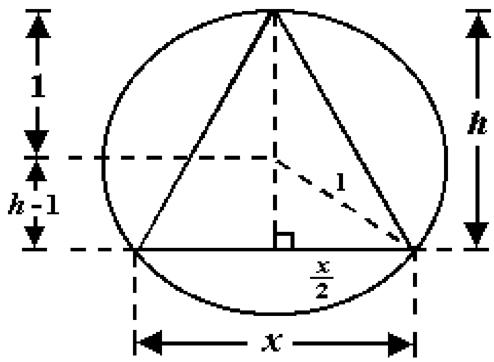
$$\left(\frac{x}{2} \right)^2 + (h-1)^2 = 1$$

Despejando h : $(h-1)^2 = 1 - \frac{x^2}{4} = \frac{4-x^2}{4}$; $h - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$;

$$h = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} = \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{4-x^2} \right)$$

Sustitutuyendo h en (1):

$$y = \frac{1}{2} x \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{4-x^2} \right) \qquad y = \frac{1}{4}\left(2x + x\sqrt{4-x^2} \right)$$



I.70 Un tanque de lámina de hierro en forma cilíndrica cerrado en sus extremos por semiesferas, de dimensiones variables "r" y "h", como se ve en la figura, debe construirse con $4\ m^2$ de lámina. Formular una función que determine la capacidad del tanque en términos de "r".

SOLUCIÓN:

La capacidad del tanque es:

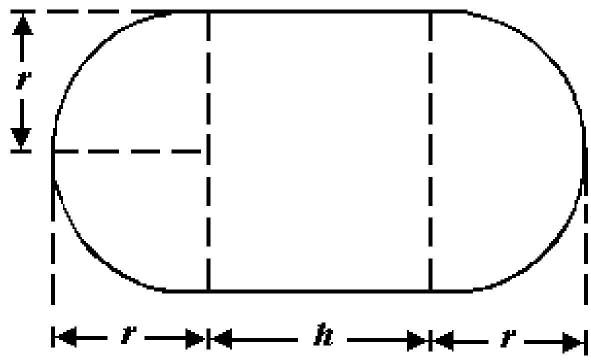
$$V = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3$$

El área de lámina es:

$$2\pi r h + 4\pi r^2 = 4 \ ; \qquad \pi r h = 2 - 2\pi r^2 \ ; \qquad h = \frac{2 - 2\pi r^2}{\pi r}$$

Luego:

$$V = \pi r^2 \frac{2 - 2\pi r^2}{\pi r} + \frac{4}{3}\pi r^3 = 2r - 2\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi r^3 \ ; \qquad V = 2r - \frac{2}{3}\pi r^3$$



I.71 En una esfera de radio constante "R" está inscrito un cilindro de dimensiones variables. Formular una función que sirva para calcular el volumen del cilindro en términos del radio de su base "r".

SOLUCIÓN:

Sea V el volumen del cilindro y "h" su altura

$$V = \pi r^2 h \text{ .... } (1)$$

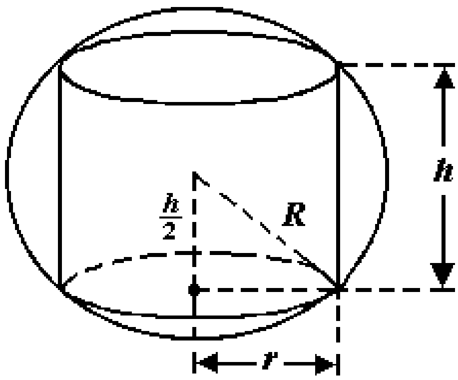
De la figura y por el Teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = R^2 \,; \qquad \frac{h^2}{2^2} = R^2 - r^2$$

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2} \;.$$

Sustituyendo este valor en (1):

$$V = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$



I.72 Un tanque de forma prismática de base cuadrada con tapa, se construirá soldando entre si seis placas de acero, cuatro rectangulares y dos cuadradas que deben totalizar un área de $20\ m^2$. Formular una función para determinar la longitud del cordón de soldadura necesario en términos del lado "x" de su base.

SOLUCIÓN:

Si "y" es la longitud del cordón de soldadura y "h" la altura del tanque:

$y = 8x + 4h$ .... (1)

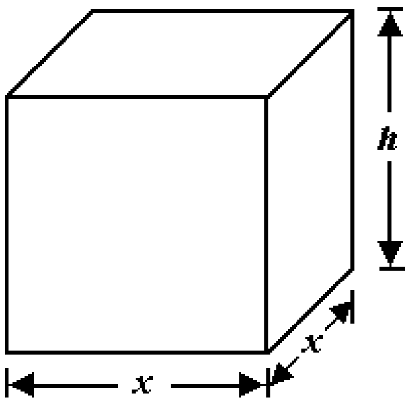
El área de placa es:

$2x^2 + 4xh = 20 \qquad 4xh = 20 - 2x^2$, luego: $h = \dfrac{10 - x^2}{2x}$

Sustituyendo este valor en (1)

$$y = f(x) = 8x + 4\,\frac{10 - x^2}{2x} = 8x + \frac{20 - 2x}{x} = \frac{8x^2 + 20 - 2x}{x}$$

$$f(x) = \frac{8x^2 - 2x + 20}{x}$$

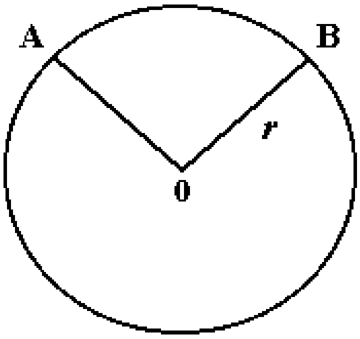


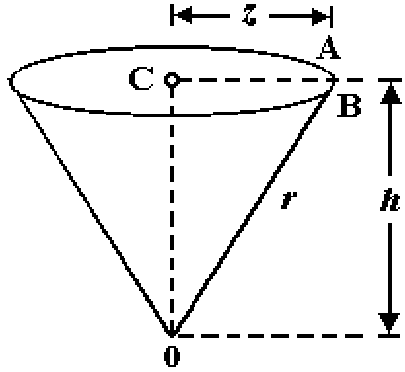
I.73 Con una cartulina circular de radio fijo "r" hay que hacer un vaso cónico recortando un sector circular AOB y uniendo los bordes OA y OB . Formular una función que sirva para calcular la capacidad "V" del vaso en términos de su altura "h" .

SOLUCIÓN:

En la figura, sean $OC = h$, $AC = z$; $V = \frac{1}{3}\pi z^2 h$, en el triángulo ACO: $r^2 = z^2 + h^2$; $z^2 = r^2 - h^2$

Luego: $V = \frac{1}{3}\pi\left(r^2 - h^2\right)h$, $V = \frac{\pi}{3}\left(r^2 h - h^3\right)$





I.74 Un bote cilíndrico sin tapa de 5 litros de capacidad, de dimensiones variables "r" y "h" , se construirá con lámina de fierro soldada. Formular una función que sirva para calcular la longitud de las juntas que deberán soldarse en términos del radio "r"

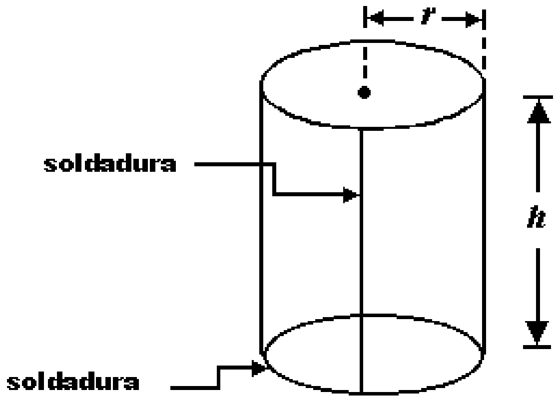
SOLUCIÓN:

La capacidad del bote es:

$$V = \pi r^2 h = 5$$

Despejando "h" :

$$h = \frac{5}{\pi r^2}$$



La longitud de la soldadura es:

$$\ell = 2\pi r + h$$

por lo cual

$$\ell = 2\pi r + \frac{5}{\pi r^2} \qquad \ell = + \frac{2\pi^2 r^3 + 5}{\pi r^2}$$

I.75 Un cono de dimensiones variables "r" y "h" está inscrito en otro cono de dimensiones constantes "R" y "H" como se ve en la figura. Formular una función en la que la variable dependiente sea el volumen del cono inscrito y la variable independiente su altura "h" .

SOLUCIÓN:

El volumen del cono inscrito es:

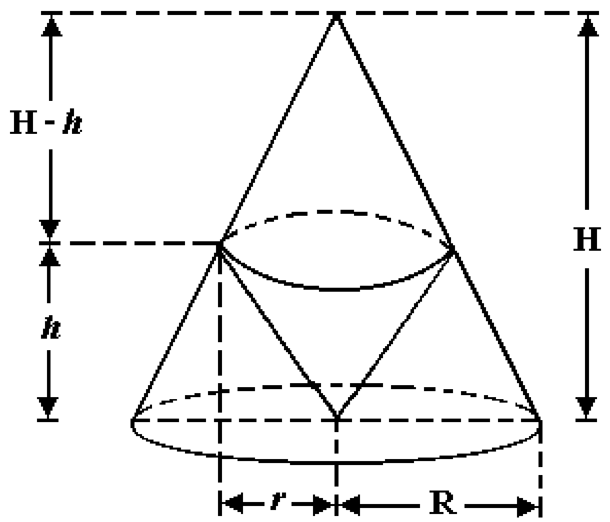
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ ....} (1)$$

De la figura, por semejanza de triángulos:

$$\frac{r}{H-h} = \frac{R}{H} \quad \text{luego:} \quad r = \frac{R}{H}(H-h)$$

Sustituyendo este valor en (1) :

$$V = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{R}{H}(H-h)\right]^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{H^2}(H-h)^2 h \; ; \quad V = \frac{\pi R^2}{3H^2}(H-h)^2 h$$



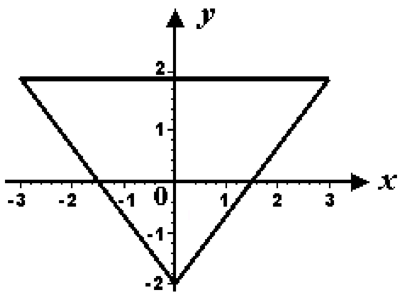
F U N C I O N E S



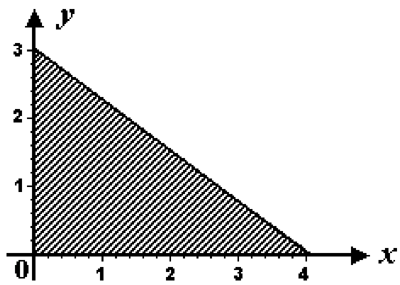
E J E R C I C I O S P R O P U E S T O S

I.76 Dada la gráfica de cada una de las siguientes relaciones indicar si se trata de una función o no, argumentando las respuestas.

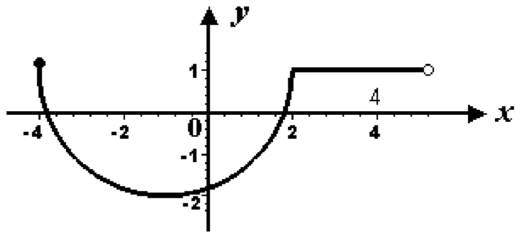
a)



b)

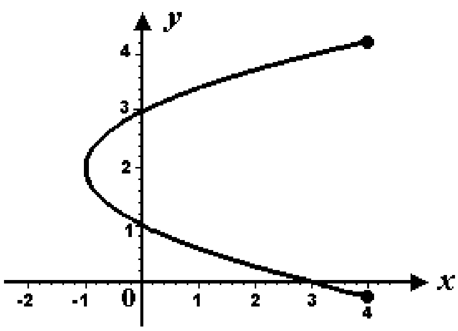


c)

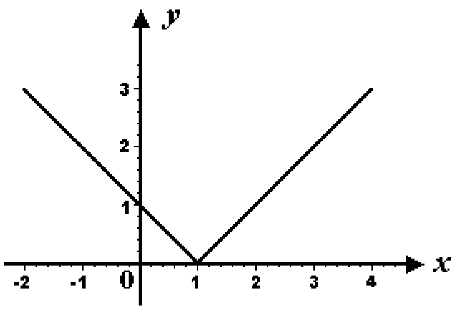


I.77 Observando las gráficas de relaciones siguientes concluir si corresponden a funciones y ¿por qué?

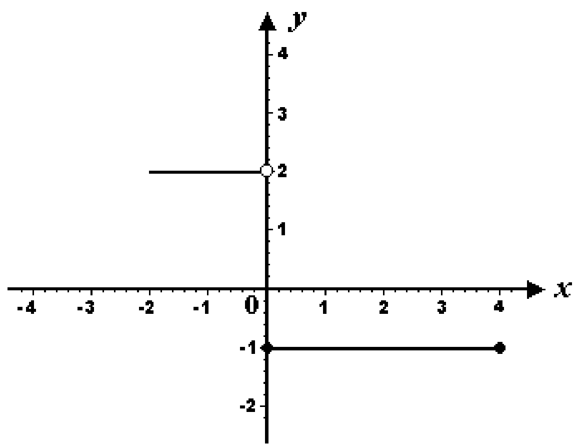
a)



b)



c)



Dadas las siguientes relaciones, trazar su gráfica e indicar en cada caso si se trata de una función o no:

I.78 $R_1 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x, y \in IR, \ x^2 + y^2 \leq 9; \ y \geq 0 \right\}$

I.79 $R_2 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x, y \in IR, \ y = |x|, \ -3 < x < 3 \right\}$

I.80 $R_3 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x, y \in IR, \ y^2 = |x|, \ -2 \leq x \leq 2 \right\}$

I.81 Escribir una relación constituida por todas las parejas de números reales (x, y) que son las coordenadas de todos los puntos de la región triangular cuyos vértices son $A(1, 0)$, $B(1, 3)$, $C(5, 3)$.

I.82 Obtener una relación formada por todas las parejas de números reales (x, y) que correspondan a las coordenadas de todos los puntos de la región del plano cartesiano comprendida entre la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 + 4 = 0$, y las rectas $x = -3$, $x = 3$, incluyendo los arcos de la hipérbola y los segmentos rectilíneos involucrados.

Para cada una de las siguientes ecuaciones:

a) Trazar la gráfica si es posible.

b) Indicar si es la regla de correspondencia de una función.

I.83 $y = x^2 + 2x - 3$

I.84 $8x + 4y - 12 = 0$

I.85 $4x^2 + y^2 = 36$

I.86 $x^2 + y^2 + 1 = 0$

I.87 $x^2 - y^2 - 9 = 0$ con $y \geq 0$

I.88 $y^2 + x + 4 = 0$ con $y < 1$

Dada la relación indicada, investigar si se trata de una función o no. En caso negativo establecer alguna o algunas condiciones para que si se tenga una función. En todo caso trazar la gráfica de la función:

I.89 $R_1 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x, y \in IR, \ x^2 + y^2 = 25 \right\}$

I.90 $R_2 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x, y \in IR, \ 4x^2 + 9y^2 = 36 \right\}$

I.91 $R_3 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x, y \in IR, \ 9x^2 - 16y^2 + 144 = 0 \right\}$

I.92 $R_4 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x, y \in IR, \ y = 2\sqrt{9 - x^2} \right\}$

I.93 $R_5 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x, y \in IR, \ y = 9 - \sqrt{36 - (x-3)^2} \right\}$

1.94 $R_6 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x, y \in IR, \ 9(x-2)^2 - 4(y-3) - 36 = 0 \right\}$

Para cada una de las siguientes funciones, trazar su gráfica y determinar su dominio y rango o recorrido:

I.95 $f = \left\{ (x, y) \mid x, y \in IR,\ 2x + y - 3 = 0 \right\}$

I.96 $f = \left\{ (x, y) \mid x, y \in IR,\ xy = 16 \right\}$

I.97 $f = \left\{ (x, y) \mid x, y \in IR,\ x^2 - y^2 = 9,\ y \geq 0 \right\}$

I.98 $f = \left\{ (x, y) \mid x, y \in IR,\ y = x^2 - 4x + 5 \right\}$

I.99 $f = \left\{ (x, y) \mid x, y \in IR,\ y = 4 - \sqrt{25 - (x - 3)^2} \right\}$

I.100 Sea la función cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{\sqrt{x} + 1}$$

Escribir en cada paréntesis el número de la expresión que corresponde:

a)	$f(a)$	( )	1)	$-\frac{7}{4}$
b)	$f(a-1)$	( )	2)	$\frac{2a^2 + a - 3}{\sqrt{a} + 1}$
c)	$f(9)$	( )	3)	42
d)	$f\left(\frac{1}{4}\right)$	( )	4)	$\frac{2a^2 - 3a - 2}{\sqrt{a - 1} + 1}$
e)	$f(x-2)$	( )	5)	$\frac{2x^2 - 7x - 3}{\sqrt{x - 2} + 1}$
			6)	36
			7)	$\frac{2x^2 - 7x + 3}{\sqrt{x} - 1}$

I.101 Escribir en el paréntesis una "E" si la regla de correspondencia de la función está en forma explícita, una "I" si está en forma implícita y una "P" si está en forma paramétrica:

a) $y = x^2 - 2x - 2$ ( )

b) $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ ( )

c) $x^2 + y^2 = 25, \quad y \le -1$ ( )

d) $9(x-3)^2 + 16(y-2)^2 = 144, \quad y \ge 2$ ( )

e) $x = 2\,sen\,\theta\ ; \quad y = 3\cos\theta, \quad y > 0$ ( )

f) $y = t^2 + t\ ; \ x = t - 3$ ( )

g) $f(z) = -\sqrt{z^2}$ ( )

h) $y = \sqrt{2-x} - 2y$ ( )

i) $y^2 = x^2 + 144$ ( )

j) $x = \theta - sen\,\theta\ ; \quad y = 1 - \cos\theta, \quad 0 \le x \le 2\pi$ ( )

I.102 Para las siguientes funciones, indicar si cada una es inyectiva, suprayectiva o biyectiva. Considerar en todos los casos que el codominio es el conjunto de los números reales (IR) :

a) $f(x) = x + 1$

b) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$

c) $g(x) = -x^2 + 4$

d) $h(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in [-2, 2) \\ \dfrac{2|x-3|}{3-x} & si \quad x \in [2, +\infty) \quad con \quad x \neq 3 \end{cases}$

e) $f(x) = (-x)^3$

f) $F(x) = \dfrac{|x|}{x}, \quad si \quad x \neq 0$

g) $G(x) = x^2 (x^2 - 1)$

h) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & si \quad -2 \leq x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & si \quad 0 \leq x < 4 \end{cases}$

I.103 Proponer una condición a cada una de las funciones para que sea inyectiva:

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = |x|$

c) $F(x) = \dfrac{1}{|x|}$

d) $h(x) = \sqrt{25 - x^2}$

e) $G(x) = x^4$

f) $H(x) = x^2 - 2x + 2$

Para cada una de las funciones cuyas reglas de correspondencia se dan a continuación, trazar la gráfica y determinar el dominio y el rango o recorrido:

I.104 $f(x) = \begin{cases} -3 & si \quad x < 0 \\ -1 & si \quad 0 \le x < 2 \\ 2 & si \quad x > 2 \end{cases}$

I.105 $$f(x)=\begin{cases} -x+1 & si \quad x<0 \\ \frac{1}{2}x+1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

I.106 $$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2 & si \quad x\in[-3,\ 0] \\ 2-x & si \quad x\in(0,\ 4] \end{cases}$$

I.107 $$f(x)=\begin{cases} |x| & si \quad -3<x<1 \\ -x^2+2x & si \quad 1<x\leq 3 \end{cases}$$

I.108 $$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x\in(-\infty,\ 0] \\ \dfrac{x^2-4}{x-2} & si \quad x\in(0,\ 4) \end{cases}$$

I.109 $$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-2 & si \quad -3<x<1 \\ -x^2+6x-4 & si \quad 1\leq x<5 \end{cases}$$

I.110 $f(x)=\begin{cases} -x^2-4x-2 & si \quad x<0 \\ x^2-4x-2 & si \quad x>0 \end{cases}$

I.111 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+3|}{x+3} & si \quad -5\le x<1 \\ \dfrac{1}{2}x+2 & si \quad 1\le x\le 4 \end{cases}$

I.112 $f(x)=\begin{cases} 3-x & si \quad x\in[-2,\ 3) \\ 3+\sqrt{36-(x-9)^2} & si \quad x\in[3,\ 9] \\ x-1 & si \quad x>9 \end{cases}$

I.113 $f(x)=\begin{cases} 2+\dfrac{3}{4}\sqrt{7+6x-x^2} & si \quad x\in[-1,\ 7] \\ 1 & si \quad x>\notin(-1,\ 7) \end{cases}$

Dadas las funciones f y g por medio de sus reglas de correspondencia, determinar las funciones $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$ así como sus dominios:

I.114 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$

I.115 $f(x)=\sqrt{x-2}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$

I.116 $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$; $g(x)=x$

Determinar $\dfrac{f}{g}$ y $\dfrac{g}{f}$ y sus dominios.

I.117 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$

I.118 $f(x)=\sqrt{x-2}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$

Determinar $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.

I.119 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$

I.120 $f(x)=\sqrt{x-2}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$

Determinar $f+g$, $f-g$ y $f\cdot g$ y sus respectivos dominios, si:

I.121 $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=4-x^2$

I.122 $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=x^2-1$

I.123 $f(x)=x^2+1$; $g(x)=3x-2$

I.124 $f(x)=\sqrt{x+4}$; $g(x)=x^2-4$

I.125 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$; $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$

I.126 $f(x)=x^2$; $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Determinar $\dfrac{f}{g}$ y $\dfrac{g}{f}$ y sus respectivos dominios, si:

I.127 $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=4-x^2$

I.128 $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=x^2-1$

I.129 $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 3x - 2$

I.130 $f(x) = \sqrt{x + 4}$; $g(x) = x^2 - 4$

I.131 $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; $g(x) = \dfrac{x}{x - 2}$

I.132 $f(x) = x^2$; $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Obtener $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ y el dominio de cada función resultante, para:

I.133 $f(x) = x - 2$; $g(x) = x + 7$

I.134 $f(x) = 3 - 2x$; $g(x) = 6 - 3x$

I.135 $f(x) = \sqrt{x - 2}$; $g(x) = x^2 - 2$

I.136 $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \sqrt{x}$

I.137 $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

I.138 Dadas las reglas de correspondencia de las funciones f , g y h :

$$f(x) = \frac{x}{x-1}; \qquad g(x) = x^2 - 1; \qquad h(x) = 5 - 2x$$

determinar las reglas de correspondencia de la función φ , su dominio, recorrido y gráfica siendo:

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x < -\sqrt{2} \\ f(x) \cdot g(x) & si \quad -\sqrt{2} \le x < 4 \\ g(x) + h(x) & si \quad x \ge 4 \end{cases}$$

I.139 Dada la función:

$$f = \left\{ (x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 1}, \ x > 0 \right\}$$

indicar si es biunívoca. En caso afirmativo, determinar su función inversa, los dominios, recorridos y gráficas de ambas funciones.

I.140 Sea:

$$f = \left\{ (x, y) \mid y = x^2 + 2x + 2 ; \ -1 \le x \le 1 \right\}$$

investigar si se trata de una función biunívoca, si lo es, obtener su función inversa, así como el dominio, recorrido y gráfica de cada una de las funciones.

Considerando la función dada f, investigar si es biunívoca, en caso de que lo sea, determinar su función inversa, el dominio, recorrido y trazar la gráfica de ambas funciones:

I.141 $f=\left\{ (x,\ y) \mid y=\sqrt{x-3} \quad ; \quad 3<x<7 \right\}$

I.142 $f=\left\{ (x,\ y) \mid y^{2}-2y-x+2=0 \ ; \quad 1\le y\le 3 \right\}$

I.143 $f=\left\{ (x,\ y) \mid 4x^{2}+y^{2}-36=0, \quad x\ge 0, \quad 0\le y\le 6 \right\}$

I.144 $f=\left\{ (x,\ y) \mid y=4-\sqrt{25-(x-3)^{2}} \quad ; \quad 3<x<8 \right\}$

I.145 $f=\left\{ (x,\ y) \mid 4(x-2)^{2}-9(y-3)^{2}=36, \quad x\ge 5, \quad y\ge 3 \right\}$

I.146 Indicar si las ecuaciones paramétricas:

$$x=4(1-t) \ ; \qquad y=2t \qquad \text{donde} \qquad t\ge 0$$

determinan una función. En caso afirmativo obtener el dominio, el recorrido y trazar la gráfica.

Para la función dada en forma paramétrica, siendo x la variable independiente:

a) ¿Para qué valores de " t " está definida la función?

b) Obtener la función en forma cartesiana.

c) Determinar su dominio y su recorrido.

d) Trazar su gráfica.

I.147 $x = t + 2$; $y = 2t + 3$

I.148 $x = t - 2$; $y = +\sqrt{t}$

I.149 $x = 2t - 1$; $y = t^2 + 3$

I.150 $x = t^2 - 2$; $y = t + 1, \quad y \geq 1$

I.151 Para las siguientes funciones explícitas, indicar para cada una si se trata de una función par, impar o si no es par ni impar.

a) $y = 3x^2$

b) $y = 2x + 1$

c) $y = -\left| x \right|$

d) $y = \left| \frac{1}{x} \right|$

e) $y = x^2 - 4$

f) $y = \left| x^3 \right|$

g) $y = -\frac{3}{2} x$

h) $y = 2 - (x + 1)^2$

i) $y = -\sqrt{25 - x^2}$

j) $y = x^2 - 2x$

I.152 En una circunferencia de $20\ cm$ de radio está inscrito un triángulo isósceles de dimensiones variables, formular una función que establezca el área del triángulo en términos de su altura "h"

I.153 En la construcción de un tanque prismático de base cuadrada con tapa se empleará $5\ m^2$ de placa de acero, formular una función para determinar la capacidad del tanque en términos de la longitud "x" del lado de su base.

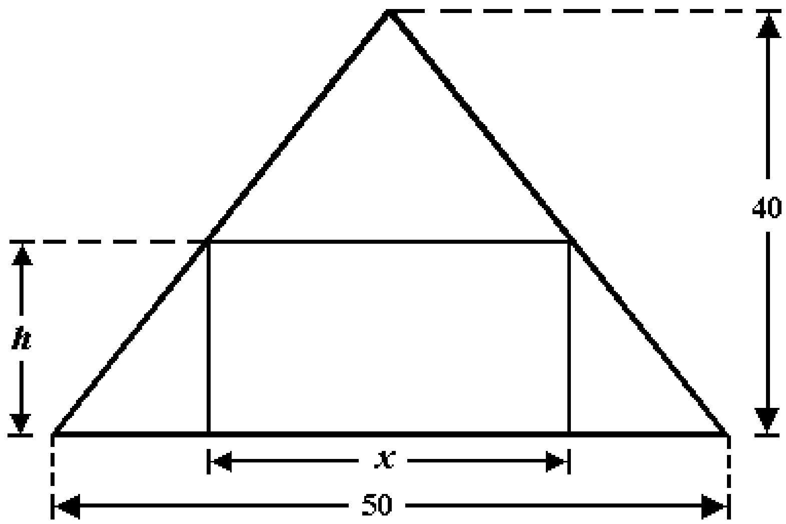
I.154 Un rectángulo de dimensiones variables, está inscrito en una circunferencia de $30\ cm$ de radio, formular una función que permita calcular el área del rectángulo en términos de su altura "h" .

I.155 En una esfera de $1.00\ m$ de diámetro está inscrito un cilindro de dimensiones variables, formular una función para calcular el volumen del cilindro en términos de su altura.

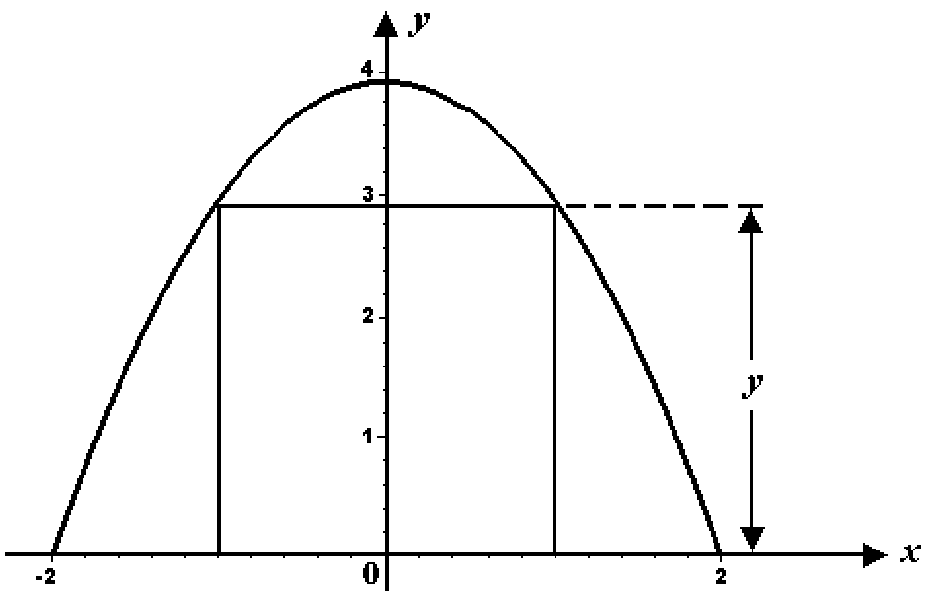
I.156 En un tanque prismático de base cuadrada sin tapa deberá construirse empleando $4\ m^2$ de placa de acero, formular una función que sirva para calcular la capacidad del tanque en términos de la longitud "x" del lado de su base.

I.157 En una esfera de $2.00\ m$ de diámetro está inscrito un cono de dimensiones variables, formular una función cuya variable dependiente sea el volumen del cono y cuya variable independiente sea la altura "h" del mismo.

I.158 En un triángulo isósceles de $50\ cm$ de base y $40\ cm$ de altura está inscrito un rectángulo de dimensiones variables "x" y "h" como se ve en la figura. Formular una función para calcular el área del rectángulo en términos de la longitud de su base "x" .

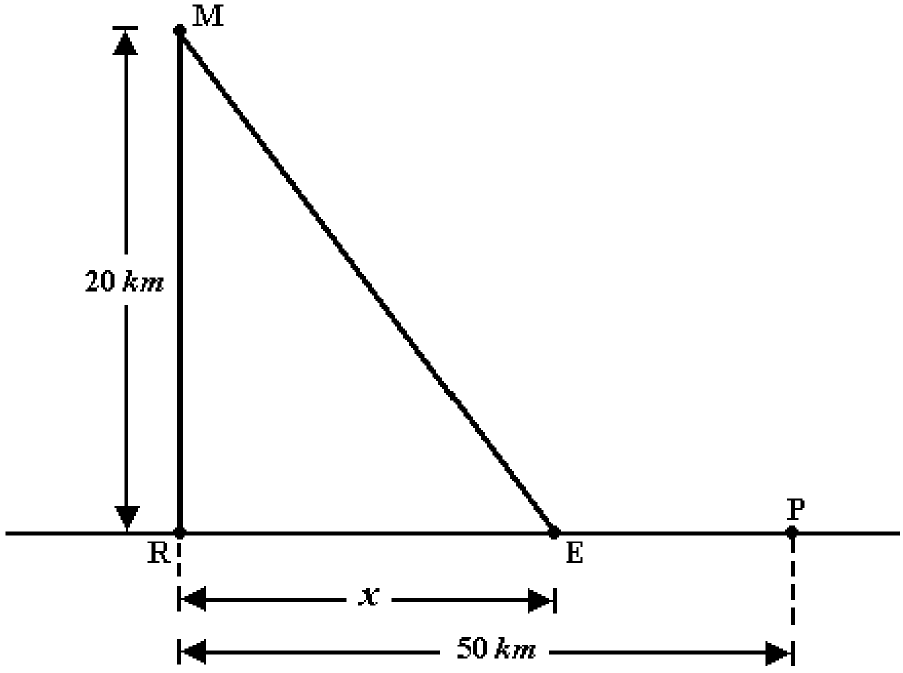


I.159 Un rectángulo de base y altura variables está inscrito en la región comprendida entre la parábola $y = 4 - x^2$ y el eje de las abscisas como se observa en la figura. Formular una función con la que pueda determinarse el área del rectángulo en términos de su altura "y" .

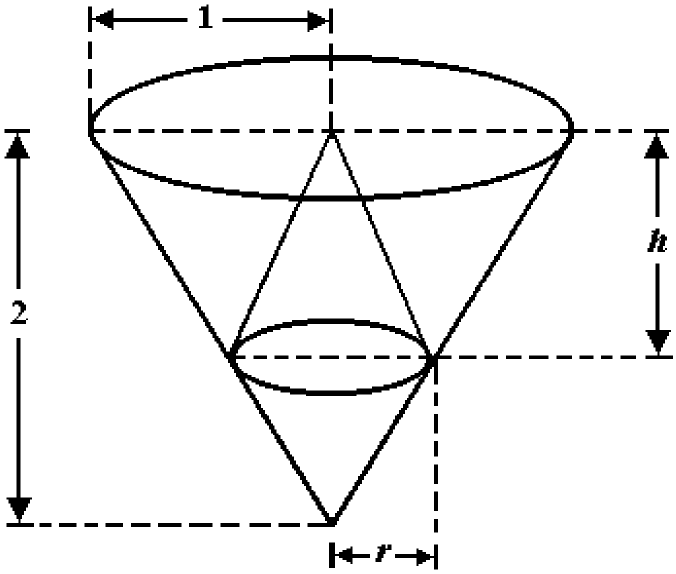


I.160 Al construir un bote cilíndrico con tapa, deberán emplearse $2.00\ m^2$ de lámina, formular una función para determinar la capacidad del bote en términos de su radio $"r"$.

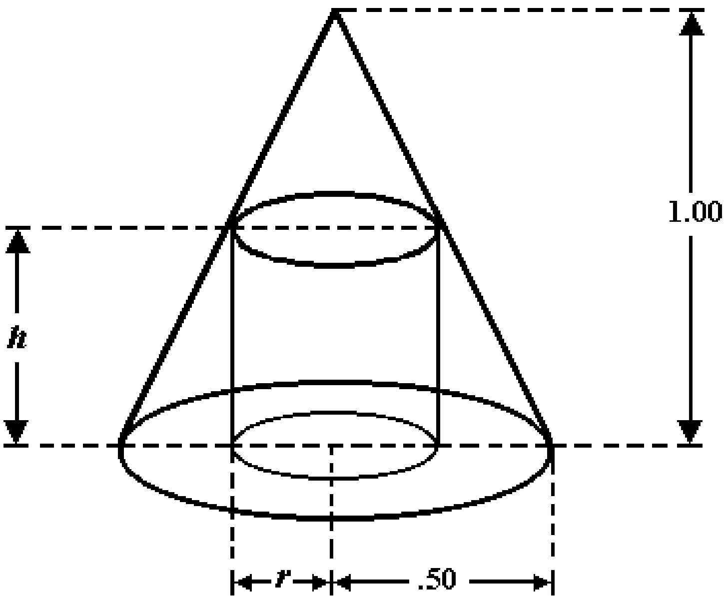
I.161 Desde una mina $"M"$ debe transportarse mineral a una planta de procesamiento $"P"$ que se localiza en la ribera de un río que pasa por los puntos $"R"$ y $"P"$. El transporte se efectuará por vía terrestre de $"M"$ al embarcadero $"E"$, y por vía fluvial de $"E"$ a $"P"$. La distancia de $"M"$ a $"R"$ es de $20\ km$ y de $"R"$ a $"P"$ hay $50\ km$. El costo de transporte terrestre es de $\$50.00$ por Ton-km y por vía fluvial es de $\$30.00$ por Ton-km. Formular una función que determine el costo total del transporte con la trayectoria $M\,E\,P$ en términos de la distancia $"x"$ de $"R"$ a $"E"$.



I.162 En un cono de radio $1.00\ m$ y altura $2.00\ m$ está inscrito otro cono de dimensiones variables "r" y "h" como se ve en la figura, formular una función para calcular el volumen del cono inscrito en términos de su radio "r".



I.163 Un cilindro de dimensiones variables "r" y "h" está inscrito en un cono de $0.50\ m$ de radio y $1.00\ m$ de altura, como se observa en la figura, formular una función con la que se pueda calcular el volumen del cilindro en términos de su altura "h".

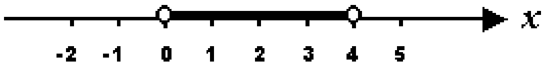


L Í M I T E S
Y
C O N T I N U I D A D

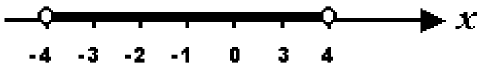


E J E R C I C I O S
R E S U E L T O S

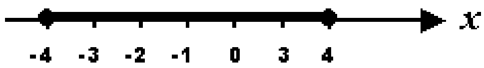
II.1 ¿Cuál de las siguientes gráficas representa el entorno $\left| x - 2 \right| < 2$?



a)



b)



c)

SOLUCIÓN:

Por la definición de valor absoluto se tiene

$$-2 < x - 2 < 2 \quad \Rightarrow \quad -2 + 2 < x < 2 + 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 4$$

luego la gráfica (a) representa al entorno dado.

II.2 Trazar las gráficas correspondientes a los siguientes entornos:

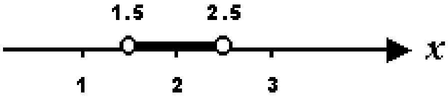
a) $\varphi\ (\ 2\ ,\ \ 0.5\ )$

b) $\varphi'\ (\ 3\ ,\ \ 0.75\ )$

c) $0 < |\ x - 1\ | < 0.5$

SOLUCIÓN:

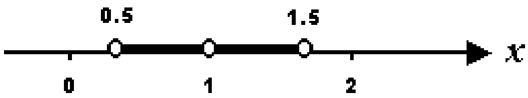
a) Se trata del un entorno común del punto 2 y radio 0.5



b) Se trata de un entorno reducido del punto 3 y radio 0.75



c) Es un entorno reducido del punto 1 y radio 0.5



Tomando en cuenta los teoremas sobre límites y sobre operaciones con límites, calcular los límites siguientes.

II.3 $$\lim_{x \to 3} \left(x^2 - 2x + 5 \right) = \lim_{x \to 3} x^2 - \lim_{x \to 3} (2x) + \lim_{x \to 3} 5 =$$

$$= \left(\lim_{x \to 3} x \right)^2 - \lim_{x \to 3} (2) \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 5 =$$

$$= (3)^2 - 2(3) + 5 = 9 - 6 + 5 = 8$$

II.4 $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{\lim_{x \to 2} \left(x^2 - 9 \right)}{\lim_{x \to 2} (x - 3)} = \frac{\left(\lim_{x \to 2} x \right)^2 - \lim_{x \to 2} 9}{\lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 3} = \frac{4 - 9}{2 - 3} = \frac{-5}{-1} = 5$$

II.5 $$\lim_{x \to 1} \sqrt{x^3 - 3x^2 + 5x + 1} = \sqrt{\left(\lim_{x \to 1} x \right)^3 - \lim_{x \to 1} (3) \left(\lim_{x \to 1} x \right)^2 + \lim_{x \to 1} 5 \lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 1} =$$

$$= \sqrt{1 - 3 + 5 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

II.6 $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt[3]{\dfrac{x^2-4}{x-2}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{x-2}} = \sqrt[3]{\dfrac{4-4}{-2-2}} = \sqrt[3]{\dfrac{0}{-4}} = 0$

II.7 Si $f(x) = x^2 - 2bx$, donde b es constante, obtener

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

SOLUCIÓN:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 2b(x+h) - x^2 + 2bx}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 2bx - 2bh - x^2 + 2bx}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 2bh}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h - 2b) = 2x - 2b$$

Calcular los siguientes límites, que por simple sustitución dan la indeterminación $\dfrac{0}{0}$

II.8 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{4}{3}$

II.9 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)^2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x-2) = 2-2 = 0$

II.10 $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-10x+25}{25-x^2} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x-5)^2}{-(x-5)(x+5)} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x-5}{-(x+5)} = \dfrac{0}{-10} = 0$

II.11 $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0$$

II.12 $$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 3x - 2}{2x - 1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(x+2)}{2x-1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} (x+2) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

II.13 $$\lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{3x^2 + 5x - 2}{3x^2 + 8x - 3} = \lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{(3x-1)(x+2)}{(3x-1)(x+3)} = \lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{x+2}{x+3} = \frac{\frac{1}{3} + 2}{\frac{1}{3} + 3} = \frac{7}{10}$$

II.14 $$\lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{3x^2 + x - 2}{3x^2 + 4x - 4} = \lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{(3x-2)(x+1)}{(3x-2)(x+2)} = \lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\frac{2}{3} + 1}{\frac{2}{3} + 2} = \frac{5}{8}$$

II.15 $$\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{2x^2 - x - 6}{2x^2 + 9x + 9} = \lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{(2x+3)(x-2)}{(2x+3)(x+3)} = \lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{x-2}{x+3} = \frac{\frac{3}{2} - 2}{\frac{3}{2} + 3} = \frac{3-4}{3+6} = -\frac{1}{9}$$

II.16 $$\lim_{x \to \frac{3}{4}} \frac{4x^2 - 7x + 3}{8x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \to \frac{3}{4}} \frac{(4x-3)(x-1)}{(4x-3)(2x+1)} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{3}{4}} \frac{x-1}{2x+1} = \frac{\frac{3}{4} - 1}{2\left(\frac{3}{4}\right) + 1} = \frac{\frac{3-4}{4}}{\frac{3+2}{2}} = \frac{-1}{\frac{3+2}{2}} = \frac{-1}{2(5)} = -\frac{1}{10}$$

II.17 $$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \left(\sqrt{x}+2\right) = \sqrt{4}+2 = 4$$

II.18 $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9-x}-3}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{9-x}-3\right)\left(\sqrt{9-x}+3\right)}{x\left(\sqrt{9-x}+3\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{9-x-9}{x\left(\sqrt{9-x}+3\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{9-x}+3} = \frac{-1}{3+3} = -\frac{1}{6}$$

II.19 $$\lim_{x \to \frac{3}{2}} \sqrt{\frac{8x^3-27}{4x^2-9}} = \sqrt{\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{8x^3-27}{4x^2-9}} = \sqrt{\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{(2x-3)\left(4x^2+6x+9\right)}{(2x-3)(2x+3)}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{4x^2+6x+9}{2x+3}}$$

$$= \sqrt{\frac{4\left(\frac{3}{2}\right)^2+6\left(\frac{3}{2}\right)+9}{2\left(\frac{3}{2}\right)+3}} = \sqrt{\frac{9+9+9}{3+3}} = \sqrt{\frac{3(9)}{3(2)}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

II.20 $\lim_{x \to -8} \dfrac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$

$$\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} = \frac{\left(\sqrt{1-x}-3\right)\left(\sqrt{1-x}+3\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(2+\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+3\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)} = \frac{(1-x-9)\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)}{(x+8)\left(\sqrt{1-x}+3\right)}$$

$$= \frac{-(x+8)\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)}{(x+8)\left(\sqrt{1-x}+3\right)} = -\frac{\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\sqrt{1-x}+3} =$$

$$\lim_{x \to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} = -\lim_{x \to -8} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{1+8}+3} =$$

$$= -\frac{(4+4+4)}{3+3} = -\frac{12}{6} = -2$$

II.21 $\lim_{x \to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{(x-1)\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{(x-1)\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} = -\lim_{x \to 1} \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} = -\frac{1}{3}$$

II.22 $= \lim_{x \to 0} \dfrac{sen\,3x}{4x} = \dfrac{3}{4} \lim_{x \to 0} \dfrac{sen\,3x}{3x} = \dfrac{3}{4}(1) = \dfrac{3}{4}$

II.23 $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\,(1+\cos x)}{x\,(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x\,(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\,(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = (1)\,\frac{0}{1+1} = 0$$

II.24 $$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0} \frac{(\cos\theta-1)\,(\cos\theta+1)}{\theta^2(\cos\theta+1)} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta^2(\cos\theta+1)} =$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2\theta}{\theta^2(\cos\theta+1)} = -\left(\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)^2 \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\cos\theta+1} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

II.25 $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\frac{1}{\cos x}\right) = \left(\frac{1}{1}\right) = 1$$

II.26 $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\operatorname{sen} x}\, x = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\,(1+\cos x)}{x\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

II.27 $$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x + 2\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 4x\sqrt{\operatorname{sen} x} + 4\operatorname{sen} x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x} + \frac{4x\sqrt{\operatorname{sen} x}}{x} + \frac{4\operatorname{sen} x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} x + 4\sqrt{\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x} + 4\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 4$$

II.28 $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{(\cos^2 x-1)(\cos x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{(\cos^2 x-1)(\cos x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Obtener los siguientes límites cuando x tiende al infinito si es que existen:

II.29 $= \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 6x + 4}{2x^2 + x - 7}$

Dividiendo numerador y denominador entre x^2, queda:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - 6\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2 + \frac{1}{x} - 7\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\lim_{x \to \infty} 1 - 6 \lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x}\right) + 4 \lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\lim_{x \to \infty} 2 + \lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x}\right) - 7 \lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1-6(0)+4(0)}{2+0-7(0)} = \frac{1}{2}$$

II.30 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x^3 + 4x^2 - 6}$

Dividiendo numerador y denominador entre x^3 se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3\left(\frac{1}{x}\right) - 5\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x}\right)^3}{1 + 4\left(\frac{1}{x}\right) - 6\left(\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{3(0) - 5(0) + 2(0)}{1 + 4(0) - 6(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

II.31 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 3x^2 + 1}{2x^3 - 4x + 7}$

Dividiendo numerador y denominador entre x^4,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{2x^3 - 4x + 7} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^4}{2\left(\frac{1}{x}\right) - 4\left(\frac{1}{x}\right)^3 + 7\left(\frac{1}{x}\right)^4} = \frac{1 - 3(0) + 0}{2(0) - 4(0) + 7(0)} = \frac{1}{0} = \infty$$

se observa que el límite no existe, el valor de la función tiende al infinito cuando $x \to \infty$.

II.32 Para la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 1 \\ -x^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Calcular los límites laterales en $x_1 = 1$ e indicar si tiene límite en este punto.

SOLUCIÓN:

$$\underset{x \to 1^-}{lím} f(x) = \underset{x \to 1^-}{lím} x^2 = 1$$

$$\underset{x \to 1^+}{lím} f(x) = \underset{x \to 1^+}{lím} \left(-x^2 \right) = -1$$

Como $\underset{x \to 1^-}{lím} f(x) \neq \underset{x \to 1^+}{lím} f(x)$, el límite $\underset{x \to 1}{lím} f(x)$ no existe.

II.33 Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 & si \quad x \leq 2 \\ (x-2)^2 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcular $\underset{x \to 2}{lím} g(x)$ si es que existe.

SOLUCIÓN:

Como $x_1 = 2$ es el valor de x donde cambia la regla de correspondencia, deben calcularse los límites laterales en ese punto

$$\underset{x \to 2^-}{lím} g(x) = \underset{x \to 2^-}{lím} \left(\frac{x}{2} + 1 \right) = \frac{2}{2} + 1 = 2$$

$$\underset{x \to 2^+}{lím} g(x) = \underset{x \to 2^+}{lím} (x-2)^2 = (2-2)^2 = 0$$

Los límites laterales en $x_1 = 2$ son diferentes, entonces la función no tiene límite cuando x tiende a 2.

II.34 Estudiar la continuidad de la función y trazar su gráfica:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si \quad -2 \le x < 1 \\ x^2 + 2 & si \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

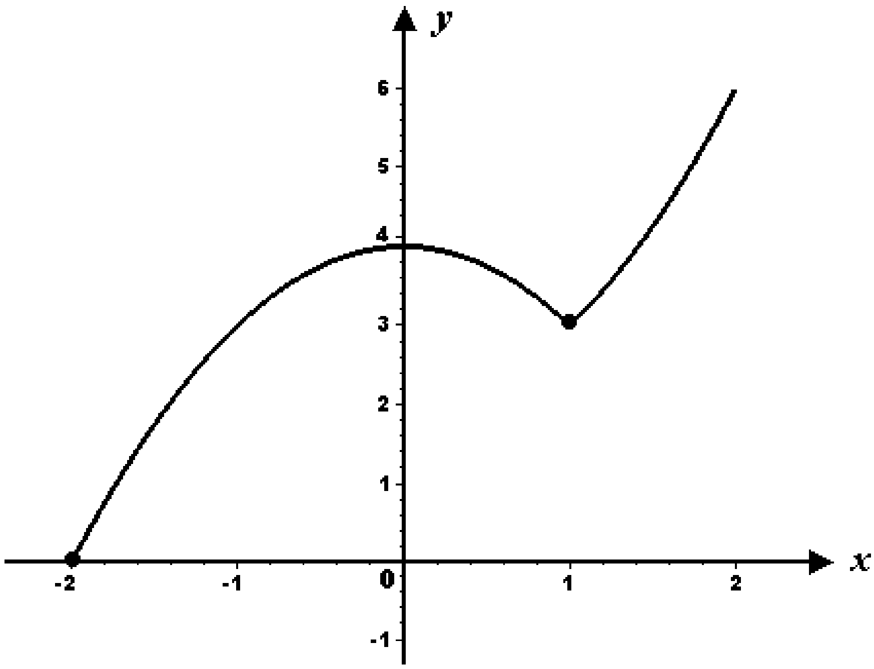
SOLUCIÓN:

La función es continua en el intervalo $[-2, 1)$ y en el intervalo $[1, 2]$ por ser entera. Hay duda en $x_1 = 1$

$f(1) = 1^2 + 2 = 3$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(4 - x^2 \right) = 4 - 1 = 3$,

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 + 2 = 3$ como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$ existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ y se tiene $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$, así que la función es continua en $x_1 = 1$ y por lo tanto es continua en todo su dominio $D_f = [-2, 2]$.

GRÁFICA 1



II.35 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & si \quad -3 \le x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & si \quad 0 < x \le 4 \end{cases}$$

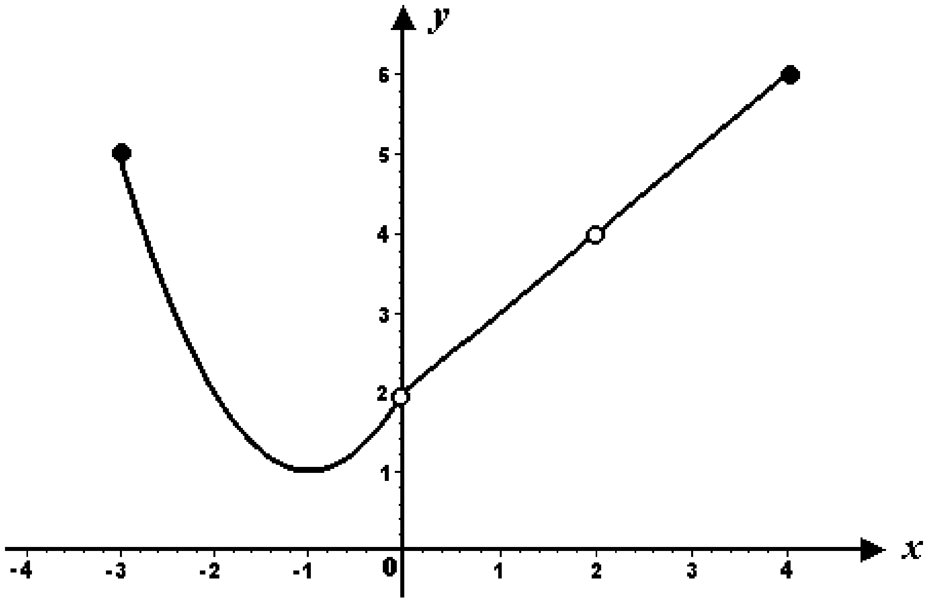
Investigar su continuidad en el intervalo $[-3, 4]$ y trazar su gráfica.

SOLUCIÓN:

La función es entera en el intervalo $[-3, 0)$, luego es continua en él. En el intervalo $(0, 4]$ la función es racional y $f(2)$ no existe, entonces es continua en $(0, 2) \cup (2, 4]$.

Como $f(0)$ y $f(2)$ no existen, la función no es continua en $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$

GRÁFICA 2



II.36 Investigar la continuidad de la función. Trazar su gráfica:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si \quad -3 \le x < 0 \\ 1 & si \quad 0 < x < \pi \\ sen\,\dfrac{x}{2} & si \quad \pi \le x < 3\pi \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

La función es continua en $\left[-3,\ 0\right)$ por ser entera.

La función es continua en $\left[0,\ \pi\right)$ por ser constante.

La función es continua en $\left(\pi,\ 3\pi\right)$ por ser seno.

Hay duda en $x_1 = 0$ y $x_2 = \pi$

Continuidad en $x_1 = 0$

$f(0)=1$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(x^2+1\right) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1) = 1$,

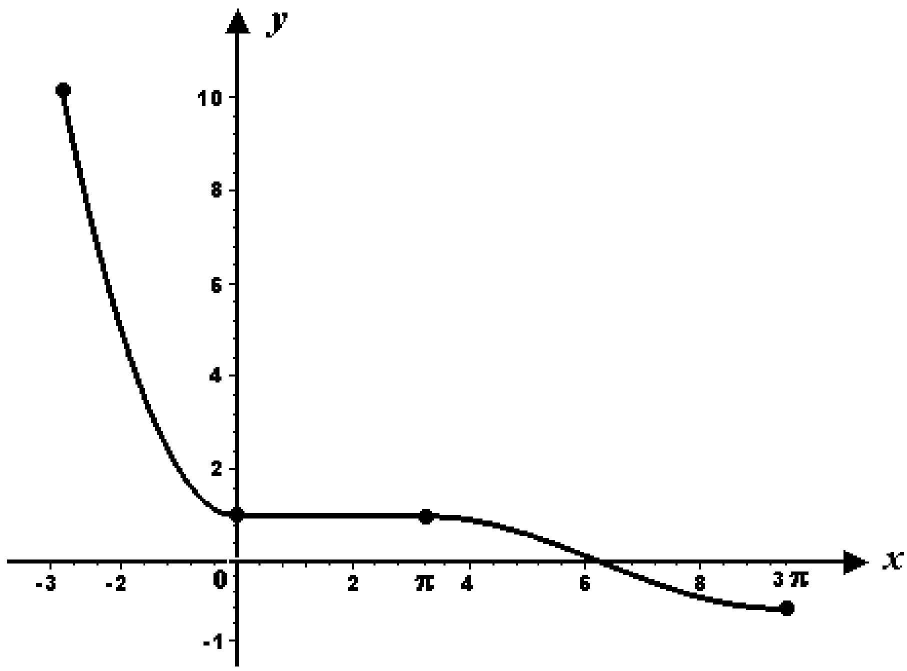
luego existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, así que la función es continua en $x_1 = 0$

Continuidad en $x_2 = \pi$

$f(\pi) = sen\,\dfrac{\pi}{2} = 1$; $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^-} (1) = 1$; $\lim\limits_{x \to \pi^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^+} sen\,\dfrac{\pi}{2} = 1$

entonces, como $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^+} f(x)$, existe $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = 1$ por lo cual la función es continua en $x_2 = \pi$ se concluye que la función es continua en todo su dominio $D_f = \left[-3,\ 3\pi\right)$

GRÁFICA 3



II.37 Investigar la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} 1+sen\,x & si \quad -\frac{3}{2}\pi \le x \le 0 \\ 2-(x-1)^2 & si \quad 0 < x \le 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

El dominio de la función es $D_f=\left[-\frac{3}{2}\pi\,,\;3\right]$

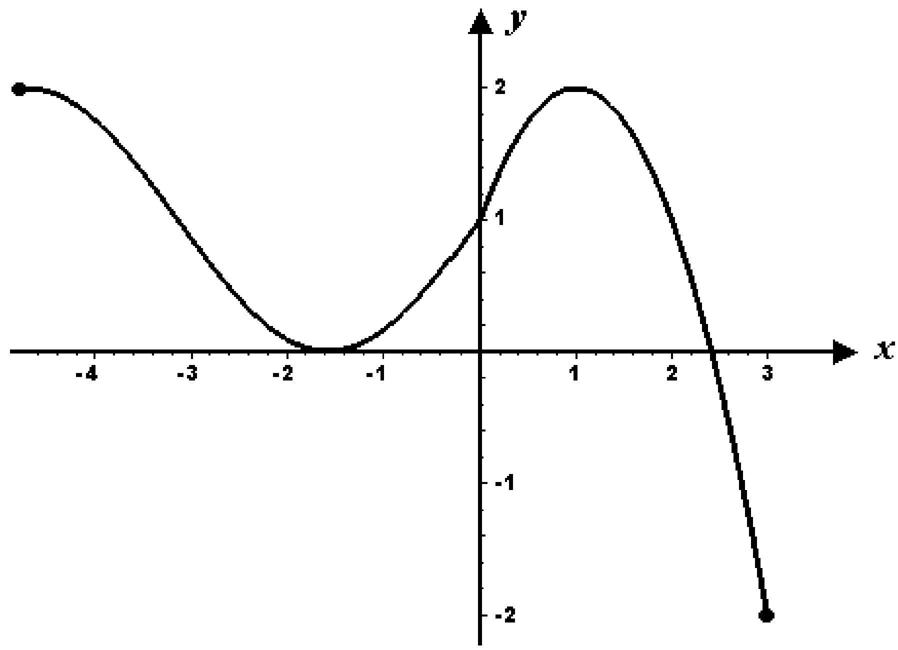
En $\left[-\frac{3}{2}\pi\,,\;0\right]$ la función es continua por ser la suma de dos funciones continuas. En $\left(0\,,\;3\right]$ la función es continua por ser polinómica. Hay duda en $x_1=0$

$f(0)=1+sen\,0=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+sen\,0)=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[2-(x-1)^2\right]=1$ como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$,

existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, así que la función es continua en $x_1=0$ y por lo tanto es continua en todo su dominio $D_f=\left[-\frac{3}{2}\pi\,,\;3\right]$

GRÁFICA 4



II.38 Calcular el valor de $"a"$ para que la función sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \le a \\ x^2 - 4x + 6 & si \quad x > a \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

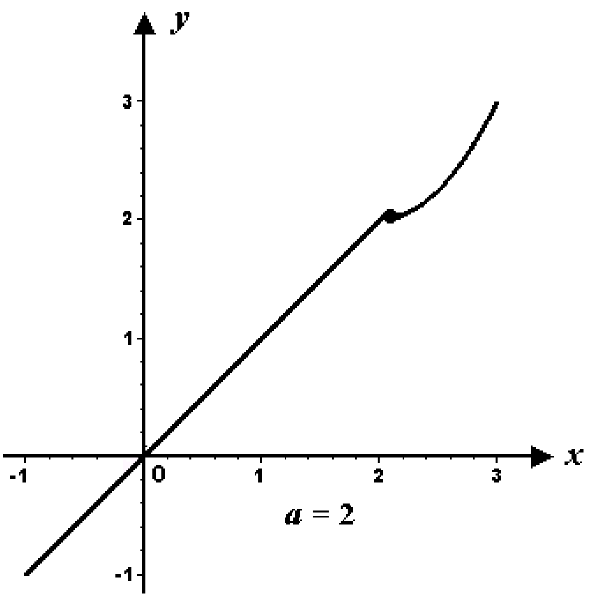
$$f(a) = a \ ; \ \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} (a) = a \ , \ \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} \left(x^2 - 4x + 6 \right) =$$

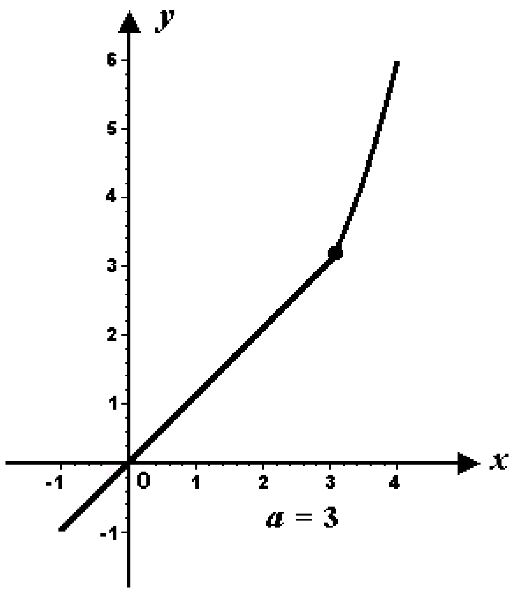
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = a^2 - 4a + 6 \ ; \ \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \ \Rightarrow \ a = a^2 - 4a + 6 \ ,$$

$$a^2 - 5a + 6 = 0 \ , \ (a-2)(a-3) = 0 \ , \ a_1 = 2 \ , a_2 = 3 \ .$$

Hay dos valores de $"a"$ que hacen continua a la función en IR, que son $a_1 = 2$, $a_2 = 3$

Gráficas 5 y 6





II.39 Determinar el valor de k y el de C para que la función dada sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} k - \frac{4}{3}x & si \quad x \leq 0 \\ cx - 2 & si \quad 0 < x \leq 2 \\ \frac{3}{2} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Las reglas de correspondencia son polinómicas, luego corresponden a una función continua, solamente hay que aplicar las condiciones de continuidad en $x_0 = 0$ y $x_1 = 2$

En $x_0 = 0$

$$f(0) = k - \frac{4}{3}(0) = k \ ; \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = k \ ; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = C(0) = -2$$

Como debe tenerse $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ para que exista $\lim_{x \to 0} f(x)$, entonces $k = -2$, así que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = -2$

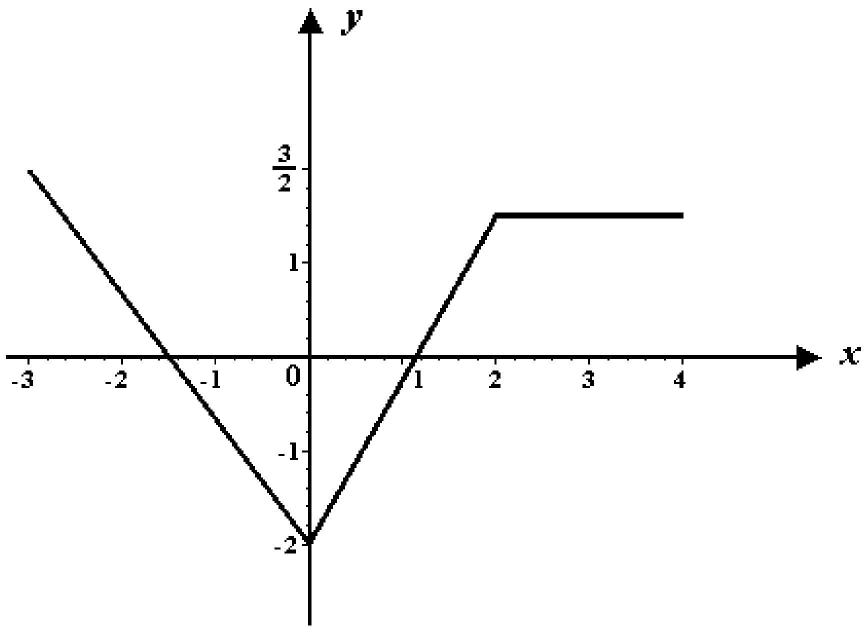
En $x_1 = 2$

$$f(2) = C(2) - 2 = 2(C-1); \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2(C-1) \ ; \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{3}{2}$$

Ahora, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \quad \Rightarrow \quad C - 1 = \frac{3}{4}$, luego $C = \frac{7}{4}$, con el cual $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = \frac{3}{4}$. La función continua en IR queda:

$$f(x) = \begin{cases} -2 - \frac{4}{3}x & si \quad x \leq 0 \\ \frac{7}{4}x - 2 & si \quad 0 < x \leq 2 \\ \frac{3}{2} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Gráfica 7



II.40 Dada la función $y = x^3 - 3x^2 + 7$, $x_1 = 2$, $x_2 = 2.1$, calcular los incrementos Δx y Δy

SOLUCIÓN:

$\Delta x = x_2 - x_1 = 2.1 - 2 = 0.1$

$y_1 = 2^3 - 3(2)^2 + 7 = 8 - 12 + 7 = 3$

$y_2 = (2.1)^3 - 3(2.1)^2 + 7 = 9.261 - 13.230 + 7 = 3.031$

$\Delta y = y_2 - y_1 = 3.031 - 3 = 0.031$

II.41 El diámetro de una circunferencia cambia de $D_1 = 5.00\,m$ a $D_2 = 4.96\,m$, calcular el incremento de su longitud.

SOLUCIÓN:

La longitud de la circunferencia es $C = \pi D$

Tomando $\pi \doteq 3.1416$

$$C_1 = \pi D_1 = 3.1416(5) = 15.7080\,m$$

$$C_2 = \pi D_2 = 3.1416(4.96) \doteq 15.5823\,m$$

$$\Delta C = C_2 - C_1 = 15.5823 - 15.7080 = -0.1257\,m$$

II.42 Calcular el incremento del volumen de una esfera si su radio $r_1 = 2.00\,m$ se incrementa $3\ cm$.

SOLUCIÓN:

El volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $r_1 = 2.00$, $\Delta r = 0.03\ m$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \doteq \frac{4}{3}(3.1416)(2)^3 \doteq 33.5104\ m^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^2 \doteq \frac{4}{3}(3.1416)(2.03)^3 \doteq 35.0411\ m^3$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 35.0411 - 33.5104 = 1.5307\,m^3$$

II.43 Por medio de incrementos demostrar que la función $f(x) = x^2 - 3x + 1$ es continua para todo valor de x .

SOLUCIÓN:

Se debe demostrar que $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad \forall\ x \in IR$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1 - (x^2 - 3x + 1) =$$

$$= x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\,\Delta x + 1 - x^2 + 3x - 1 =$$

$$= 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\,\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\,\Delta x \right] = 2x(0) + 0 - 3(0) = 0$$

Se cumple que $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

LÍMITES
Y
CONTINUIDAD



EJERCICIOS
PROPUESTOS

II.44 Representar geométricamente los siguientes entornos:

a) $\varphi(3, 0.75)$

b) $\varphi'(4, 0.6)$

c) $|x-2| < 0.4$

d) $0 < |x-5| < 0.8$

Considerando los teoremas sobre límites y sobre operaciones con límites y teniendo en cuenta el límite de la función identidad en un punto y el límite de una función constante en cualquier punto, calcular los siguientes límites:

II.45 $\lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 - 3x + 7 \right)$

II.46 $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{2} + 3x - 4x^2 \right)$

II.47 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

II.48 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 4x + 4}{2x^2 - x + 3}$

II.49 $\displaystyle \lim_{x \to -1} \sqrt{2x^2 - 3x - 4}$

II.50 $\displaystyle \lim_{x \to \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x^2 - 2}{1 - 3x}}$

II.51 $\displaystyle \lim_{x \to \frac{2}{3}} \sqrt[3]{3x^2 + x + 2}$

Calcular los siguientes límites

II.52 $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{4 - x}{x^2 - 16}$

II.53 $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

II.54 $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{2x - 6}$

II.55 $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$

II.56 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$

II.57 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

II.58 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 6x + 8}$

II.59 $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \dfrac{2x^2 + x - 6}{2x^2 - 5x + 3}$

II.60 $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{3}} \dfrac{9x^2 - 4}{3x^2 - 10x - 8}$

II.61 $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 + x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$

II.62 $\lim\limits_{x \to \frac{3}{4}} \dfrac{4x^2 + 5x - 6}{16x^2 - 9}$

II.63 $\displaystyle \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

II.64 $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$

II.65 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}}$

II.66 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

II.67 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x}$

II.68 $\displaystyle \lim_{x \to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

II.69 $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{2x}$

II.70 $\lim_{\varphi \to 0} \dfrac{sen^2 \varphi}{\varphi}$

II.71 $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen\, 4x}{3x}$

II.72 $\lim_{x \to 0} \dfrac{tan\, 4x}{3x}$

II.73 $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{3\cos\theta - 3}{2\theta}$

II.74 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x\, \tan x}{x}$

II.75 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sec x - 1}{x \sec x}$

II.76 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{sen\, x} - 3x\right)^2}{x}$

II.77 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 3x - 1}{2x^2}$

II.78 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{3x \operatorname{sen} 4x}$

II.79 $\lim\limits_{x \to 0} - \dfrac{\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{2}\, x\right)}{x \tan\left(\sqrt{2}\, x\right)}$

II.80 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4 - 4\cos x}{x^2}$

Calcular los siguientes límites cuando la variable independiente tiende al infinito, si es que existen.

II.81 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 3x - 6}$

II.82 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 7}{5 + 8x - 3x^3}$

II.83 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 6x^2 + 2}{2x^3 - 5x^2 + 4}$

II.84 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^4 - 4x^3}{2x^6 - 3x^4 + x^2}$

II.85 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 + 3x + 8}{x^2 + 2x + 2}$

II.86 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^4 - 3x^3 + x^2}{3x^2 - 7x - 9}$

Calcular el límite que se pide si es que existe, si no existe, indicar la razón de esto.

II.87 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 2 & si \quad x \le 1 \\ x + 2 & si \quad x > 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

II.88 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 9 & si \quad x < 2 \\ -x^2 + 2x + 1 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

II.89 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 5 & si \quad x \leq -1 \\ 4 - x^2 & si \quad x > -1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

II.90 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 2 & si \quad 0 < x < 3 \\ (x-3)^3 & si \quad 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

II.91 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{16 - x^2} & si \quad -4 \leq x < 0 \\ x^3 + 2 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

II.92 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} - 1 & si \quad -5 < x \leq -2 \\ -\sqrt{4 - x^2} & si \quad -2 < x < 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

II.93 $f(x) = \dfrac{2|x-4|}{x-4}$

$\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

Determinar si la función es continua en el punto indicado, en caso negativo explicar la razón de la discontinuidad.

II.94 $$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & si \quad x\le 2 \\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{4} & si \quad x>2 \end{cases}$$

En $x_1=2$

II.95 $$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & si \quad x<1 \\ -x^2+4x-3 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$$

En $x_1=1$

II.96 $$f(x)=\begin{cases} (x-1)^3 & si \quad x\le 0 \\ 3-(x-1)^2 & si \quad x>0 \end{cases}$$

En $x_1=0$

II.97 $$f(x)=\begin{cases} sen\,x & si \quad -\pi\le x<\frac{\pi}{2} \\ 1+cos\,x & si \quad \frac{\pi}{2}\le x\le \pi \end{cases}$$

En $x_1=\frac{\pi}{2}$

II.98 $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 + 1 & si \quad -4 \le x \le -1 \\ \dfrac{x+3}{x+2} & si \quad -1 < x < 2 \end{cases}$

En $x_1 = -1$

II.99 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & si \quad x \le 2 \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} & si \quad x > 2 \end{cases}$

En $x_1 = 2$

II.100 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x}{x} & si \quad -2 < x \le 3 \\ \sqrt{25 - (x-3)^2} & si \quad 3 < x < 8 \end{cases}$

En $x_1 = 0$ y en $x_2 = 3$

II.101 Estudiar la continuidad de la función en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & si \quad -1 \le x < 2 \\ 2x - 2 & si \quad 2 \le x < 4 \end{cases}$$

II.102 Investigar si la función es continua en su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & si \quad -5 \le x < 3 \\ x + 1 & si \quad 3 \le x \le 6 \end{cases}$$

II.103 Estudiar la continuidad de la función en su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - (x + 1)^2 & si \quad -3 \le x < 0 \\ x^2 - 1 & si \quad 0 \le x < 2 \end{cases}$$

II.104 Investigar si la función es continua en el intervalo $[-2, 4]$

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & si \quad -2 \le x < 1 \\ \sqrt{9 - (x-1)^2} & si \quad 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

II.105 Estudiar la continuidad de la función en el intervalo $[-4, 5]$

$$f(x) = \begin{cases} 8 - \sqrt{25 - x^2} & si \quad -4 \le x < 3 \\ \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} & si \quad 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

II.106 Estudiar la continuidad de la función en el intervalo $\left[-3 \,,\; \frac{3}{2}\pi \right]$

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & si \quad x \in [-3\,,\,0) \\ 1 - sen\,x & si \quad x \in \left(0\,,\,\frac{3}{2}\pi\right] \end{cases}$$

II.107 Estudiar la continuidad de la función en IR

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x < 0 \\ 2 & si \quad x = 0 \\ x + 1 & si \quad 0 < x < 2 \\ x^2 + 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de la función en su dominio, indicando dónde no es continua. Trazar su gráfica.

II.108 $$f(x) = \begin{cases} x + 2 & si \quad -4 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 2x + 2 & si \quad 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

II.109 $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad -2 \leq x < 1 \\ (x-2)^3 + 1 & si \quad 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

II.110 $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{25-x^2} & si \quad x\in[-5,-3)\cup(3,5]\\ 4 & si \quad x\in[-3,3]\end{cases}$$

II.111 $$f(x)=\begin{cases}(x-2)^2+1 & si \quad -4\le x<2\\ \frac{2}{3}\sqrt{9-(x-2)^2} & si \quad 2\le x\le 5\end{cases}$$

II.112 $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{16-x^2} & si \quad -3\le x\le 0\\ 3-2x & si \quad 0<x<2\\ x^2-6x+7 & si \quad 2\le x<6\end{cases}$$

II.113 $$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & si \quad -3\le x<0\\ 1 & si \quad 0\le x<\pi\\ sen\,\frac{x}{2} & si \quad \pi\le x<3\pi\end{cases}$$

II.114 Determinar el valor de la constante c con el que la función es continua:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & si \quad x\neq 5 \\ c & si \quad x=5 \end{cases}$$

II.115 Determinar el valor de la constante k que hace que la función sea continua

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & si \quad x\neq 3 \\ k & si \quad x=3 \end{cases}$$

II.116 Determinar el valor de la constante a que hace que la función sea continua

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+x-3}{4x^2-4x-15} & si \quad x\neq -\dfrac{3}{2} \\ a & si \quad x=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

II.117 ¿Para qué valor de b la función es continua en el intervalo $[-1, 3]$?

$$f(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & si \quad x<b \\ -(x-1)^2 & si \quad x\geq b \end{cases}$$

II.118 Determinar los valores de a y b que hacen que la función sea continua

$$f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x\le -1 \\ ax+b & si \quad -1<x<3 \\ -2 & si \quad x\ge 3 \end{cases}$$

II.119 Determinar los valores de las constantes c y k para que la función sea continua

$$f(x)=\begin{cases} cx^2 & si \quad x\le 1 \\ cx+k & si \quad 1<x<3 \\ x+1 & si \quad x\ge 3 \end{cases}$$

II.120 Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 2+(x-2)^2 & si \quad x<k \\ \dfrac{2}{3}\sqrt{9-(x-2)^2} & si \quad x\ge k \end{cases}$$

Determinar el valor de la constante k que la hace continua en el intervalo $[0,5]$

II.121 Sea la función $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 3.5$ calcular Δx y Δy .

II.122 Para la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$, calcular el incremento de $f(x)$ si $x_1 = 2.5$ y $\Delta x = -0.2$.

II.123 Calcular el incremento del área de un círculo si su radio cambia de $r_1 = 1.50\ m$ a $r_2 = 1.54\ m$

II.124 Si el radio $r_1 = 2.30\ m$ de una esfera se incrementa con $\Delta r = 5\ cm$, calcular:

a) El incremento del área de su superficie.

b) El incremento de su volumen.

II.12**5** Una tubería de $35\ m$ de longitud y $2.50\ m$ de diámetro exterior se va a revestir con una capa de concreto de $15\ cm$ de espesor, calcular la cantidad necesaria de concreto.

II.126 Se tiene un tanque cilíndrico de lámina que mide $1.20\ m$ de altura y su radio es de $50\ cm$. Se desea aumentar su capacidad dando a su altura un incremento de $30\ cm$. Calcular la cantidad de lámina necesaria para hacer dicho cambio.

Por medio de incrementos demostrar que la función es continua en el punto indicado:

II.127 $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$, para todo valor real de x .

II.128 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, para $x_1 = 2$.

II.129 $y = \sqrt{x^2 + 4}$, para $x_1 = 0$.

II.130 $y = |x - 3|$, para todo valor real de x .

LA DERIVADA



E J E R C I C I O S R E S U E L T O S

III.1 Obtener la derivada por el método de los 4 pasos

$$y = \frac{x-4}{x+4}$$

SOLUCIÓN:

1. $y + \Delta y = \dfrac{x + \Delta x - 4}{x + \Delta x + 4}$

2. $\Delta y = \dfrac{x + \Delta x - 4}{x + \Delta x + 4} - \dfrac{x-4}{x+4} = \dfrac{(x + \Delta x - 4)(x+4) - (x + \Delta x + 4)(x-4)}{(x + \Delta x + 4)(x+4)}$

$$\Delta y = \frac{x^2 + x\ \Delta x - 4x + 4x - 16 - x^2 - x\Delta x - 4x + 4x + 4x\Delta x + 16}{(x + \Delta x + 4)(x+4)}$$

$$\Delta y = \frac{8\,\Delta x}{(x + \Delta x + 4)(x+4)}$$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{8\,\Delta x}{\Delta x\,(x + \Delta x + 4)(x+4)}$

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{8}{(x+4)(x+4)} = \dfrac{8}{(x+4)^2}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8}{(x+4)^2}$

III.2 Derive por el método de los 4 pasos

$$f(x) = \sqrt{2x+3}$$

SOLUCIÓN:

1. $f(x+\Delta x) = \sqrt{2(x+\Delta x)+3}$

2. $f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{2(x+\Delta x)+3} - \sqrt{2x+3}$

3. $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{2(x+\Delta x)+3} - \sqrt{2x+3}}{\Delta x}$

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{2(x+\Delta x)+3} - \sqrt{2x+3}}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)+3-2x-3}{\Delta x\left[\sqrt{2(x+\Delta x)+3} + \sqrt{2x+3}\right]} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x\left[\sqrt{2(x+\Delta x)+3} + \sqrt{2x+3}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{2(x+\Delta x)+3} + \sqrt{2x+3}} = \frac{2}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{2x+3} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

III.3 Derive aplicando el método de los 4 pasos

$$y = 3\sqrt{5 - x^2}$$

SOLUCIÓN:

1. $y + \Delta y = 3\sqrt{5 - (x + \Delta x)^2}$

2. $\Delta y = 3\sqrt{5 - (x + \Delta x)^2} - 3\sqrt{5 - x^2}$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3\sqrt{5 - (x + \Delta x)^2} - 3\sqrt{5 - x^2}}{\Delta x}$

$$= \frac{3\left(\sqrt{5 - (x + \Delta x)^2} - \sqrt{5 - x^2}\right)\left(\sqrt{5 - (x + \Delta x)^2} + \sqrt{5 - x^2}\right)}{\Delta x\left[\sqrt{5 - (x + \Delta x)^2} + \sqrt{5 - x^2}\right]}$$

$$= \frac{3\left[5 - (x + \Delta x)^2 - 5 + x^2\right]}{\Delta x\left[\sqrt{5 - (x + \Delta x)^2} + \sqrt{5 - x^2}\right]}$$

$$= \frac{3\left[-2x\,\Delta x - (\Delta x)^2\right]}{\Delta x\left[\sqrt{5 - (x + \Delta x)^2} + \sqrt{5 - x^2}\right]}$$

$$= \frac{3\left[-2x - (\Delta x)\right]}{\sqrt{5 - (x + \Delta x)^2} + \sqrt{5 - x^2}}$$

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3(-2x)}{\sqrt{5 - x^2} + \sqrt{5 - x^2}} = \dfrac{-6x}{2\sqrt{5 - x^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x}{\sqrt{5 - x^2}}$$

III.4 Obtener la derivada por el método de los 4 pasos

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

1. $y + \Delta y = \sqrt[3]{(x + \Delta x)^2 - 1}$

2. $\Delta y = \sqrt[3]{(x + \Delta x)^2 - 1} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2 - 1} - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{\Delta x}$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2 - 1} - \sqrt[3]{x^2 - 1}\right)}{\Delta x}\left[\frac{\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2-1}\right)^2 + \sqrt[3]{(x+\Delta x)^2-1}\ \sqrt[3]{x^2-1} + \left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2-1}\right)^2 + \sqrt[3]{(x+\Delta x)^2-1}\ \sqrt[3]{x^2-1} + \left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{(x + \Delta x)^2 - 1 - x^2 + 1}{\Delta x\left[\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2 - 1}\right)^2 + \sqrt[3]{(x+\Delta x)^2 - 1}\ \sqrt[3]{x^2 - 1} + \left(\sqrt[3]{x^2 - 1}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x\left[\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2 - 1}\right)^2 + \sqrt[3]{(x+\Delta x)^2 - 1}\ \sqrt[3]{x^2 - 1} + \left(\sqrt[3]{x^2 - 1}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{2x + \Delta x}{\left[\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2 - 1}\right)^2 + \sqrt[3]{(x+\Delta x)^2 - 1}\ \sqrt[3]{x^2 - 1} + \left(\sqrt[3]{x^2 - 1}\right)^2\right]}$$

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta y} = \dfrac{2x}{\left[\left(\sqrt[3]{(x)^2 - 1}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{(x)^2 - 1}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x^2 - 1}\right)^2\right]}$

$$= \frac{2x}{3\left(\sqrt[3]{(x)^2 - 1}\right)^2} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3\left(x^2 - 1\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Obtener la derivada de cada una de las siguientes funciones

III.5 $y = sen\ a x$

SOLUCIÓN:

$$\frac{dy}{dx} = cos\ a x \frac{d}{dx} a x = a\ cos\ a x$$

III.6 $y = 5\ cos\ 3x$

SOLUCIÓN:

$$\frac{dy}{dx} = 5\ (-sen\ 3x)\frac{d}{dx} 3x = -5\ sen\ 3x\ (3) = -15\ sen\ 3x$$

III.7 $y = \sqrt{tan\ 4x}$

SOLUCIÓN:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sec^2\ 4x\ (4)}{2\sqrt{tan\ 4x}} = \frac{2\ sec^2\ 4x}{\sqrt{tan\ 4x}}$$

III.8 $y = a\ sec\left(b x^2\right)$

SOLUCIÓN:

$$\frac{dy}{dx} = a\ sec\left(b x^2\right) tan\left(b x^2\right)\left(2bx\right) = 2\ abx\ sec\left(b x^2\right)\ tan\left(b x^2\right)$$

III.9 $f(\theta) = \sqrt[3]{\csc 3\theta}$

SOLUCIÓN:

$$f(\theta) = \left(\csc\theta\right)^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad f'(\theta) = \frac{1}{3}\left(\csc 3\theta\right)^{\frac{-2}{3}}\left(-\csc 3\theta \cot 3\theta\right)3 =$$

$$f'(\theta) = -\frac{\csc 3\theta \cot 3\theta}{\left(\csc 3\theta\right)^{\frac{2}{3}}} = -\left(\csc 3\theta\right)^{\frac{1}{3}} \cot 3\theta = -\sqrt[3]{\csc 3\theta}\ \cot 3\theta$$

III.10 $f(x) = x^2 \cos x$

SOLUCIÓN:

$$f'(x) = x^2(-sen\,x) + \cos x\,(2x) = 2x\cos x - x^2\,sen\,x$$

III.11 $r = \frac{sen\theta}{\theta}$

SOLUCIÓN:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\theta\cos\theta - sen\theta}{\theta^2}$$

III.12 $y = \frac{x}{2}\cot x^2$

SOLUCIÓN:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}\left(-\csc^2 x^2\right)2x + \cot x^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\cot x^2}{2} - x^2\ \csc^2\ x^2$$

III.13 Dada la función $y = \sqrt{4 - x^2} + 2 \, ang \, sen \, \frac{x}{2}$ obtener $\frac{dy}{dx}$ y su valor para $x = 0$.

SOLUCIÓN:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} + \frac{2\,\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{4 - x^2}{4}}}$$

$$= \frac{2 - x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2 - x}{\sqrt{2 - x}\,\sqrt{2 + x}} = \frac{\sqrt{2 - x}}{\sqrt{2 + x}} = \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x = 0} = \sqrt{\frac{2 - 0}{2 + 0}} = \sqrt{1} = 1$$

III.14 Sea $f(x) = 16 \, ang \, sen \, \frac{x}{4} - x\sqrt{16 - x^2}$, determinar $f'(x)$ y $f'(2)$

$$\frac{dy}{dx} = 16\,\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}} - x\,\frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} - \sqrt{16 - x^2}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\frac{16 - x^2}{16}}} - \frac{-x^2 + 16 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{2x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$f'(2) = \frac{2(2)^2}{\sqrt{16 - (2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{12}} = \frac{8}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

III.15 Dada función

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x+b & si \quad x\le -1 \\ \frac{2}{3}\sqrt{9-(x-2)^2} & si \quad -1<x\le c \\ (x-2)^2+2 & si \quad x>c \end{cases}$$

a) Determinar los valores de b y c que hacen que sea continua en IR .

b) Estudiar su derivabilidad en su dominio.

c) Trazar su gráfica.

SOLUCIÓN:

a) Continuidad en $x_1 = -1$

$$f(-1)=\frac{1}{2}+b\ ; \quad \lim_{x\to -1^+} f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{9-(-3)^2}=0\ , \qquad \text{como}$$

$$f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}+b=0 \quad\Rightarrow\quad b=-\frac{1}{2}$$

continuidad en $x_2 = c$

$$f(c)=\frac{2}{3}\sqrt{9-(c-2)^2}\ ; \qquad \lim_{x\to c^+} f(x)=(c-2)^2+2\ , \qquad \text{como}$$

$$f(c)=\lim_{x\to c^+} f(x) \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3}\sqrt{9-(c-2)^2}=(c-2)^2+2\ ;$$

$$4\left[\,9-(c-2)^2\,\right]=9\left[\,(c-2)^2+2\,\right]^2\ ;\ (c-2)^2\left[\,9(c-2)^2+40\,\right]=0$$

si $\quad (c-2)^2=0 \quad\Rightarrow\quad c=2\ ;$

si $\quad 9(c-2)^2+40=0\ ;\ 9(c-2)^2=-40 \quad\Rightarrow\quad c\notin IR$

la función queda

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2} & si \quad x\leq -1 \\[2ex] \dfrac{2}{3}\sqrt{9-(x-2)^2} & si \quad -1<x\leq 2 \\[2ex] (x-2)^2+2 & si \quad x>2 \end{cases}$$

b) Derivabilidad en $x_1 = -1$

$$f'_-(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-(x-2)^2}\right)=\frac{2}{3}\,\frac{-2(x-2)}{2\sqrt{9-(x-2)^2}}=-\frac{2(x-2)}{3\sqrt{9-(x-2)^2}}$$

$$f'_+(-1)=\frac{2(3)}{3\sqrt{9-9}}=\frac{2}{0} \quad\Rightarrow\quad f'_+(-1)\,\nexists$$

La función no es derivable en $x_1 = -1$.

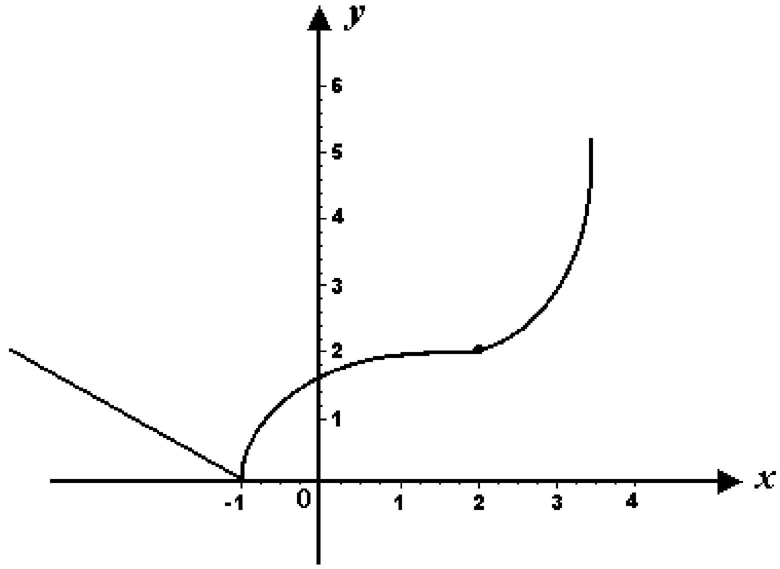
Derivabilidad en $x_2 = 2$

$$f'_-(2)=-\left.\frac{2(x-2)}{3\sqrt{9-(x-2)^2}}\right]_{x=2}=-\frac{2(0)}{3\sqrt{9-0}}=0$$

$$f'_+(2)=2(x-2)\Big]_{x=2}=2(0)=0$$

Como $f'_-(2)=f_+(2)=0$, $f'(2)=0$, por lo que la función es derivable en $x=2$ luego es derivable en $IR-\{-1\}$

c) Gráfica



III.16. Calcular el área del triángulo formado por el eje de las ordenadas, la recta tangente y la recta normal a la curva de $y^2 = 4 - x$ en el punto de ordenada 1

SOLUCIÓN:

Si $y_1 = 1$, entonces $x_1 = 4 - 1 = 3$, el punto de tangencia es: $P(3, 1)$. de la ecuación $y^2 = 4 - x$ se obtiene $2y\dfrac{dy}{dx} = -1$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2y}$ la pendiente de la tangente es $m = -\dfrac{1}{2(1)} = -\dfrac{1}{2}$

Ecuación de la recta tangente: $y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x - 3)$, $x + 2y - 5 = 0$,.

Punto de intersección con el eje de las ordenadas

Sí $x_2 = 0$, $dy = 5$, $y_2 = \dfrac{5}{2}$, $A\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$

Pendiente de la normal; $m_N = -\dfrac{1}{m} = 2$.

Ecuación de la normal; $y - 1 = 2(x - 3)$ $2x - y - 5 = 0$

Punto de intersección con el eje de las ordenadas.

Si $x_3 = 0$, $y_3 = -5$, $B(0, -5)$

Sea el segmento $\overline{AB}$ la base del triángulo.

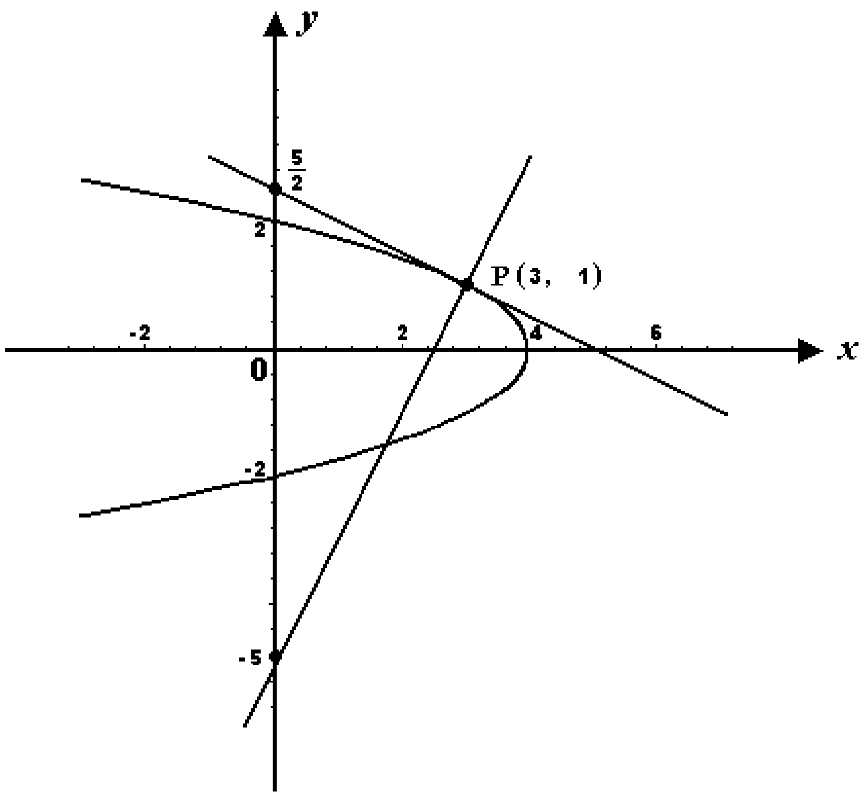
$$\frac{5}{2} - (-5) = \frac{5}{2} + \frac{10}{2} = \frac{15}{2}$$

La altura del triángulo: $h = 3$

Área del triángulo

$$A = \frac{3\left(\frac{15}{2}\right)}{2} = \frac{45}{4}$$

$A = \frac{45}{4}$ unidades de área.



III.17 Dada la elipse $x^2 + 6xy + 25y^2 = 16$ Obtener las ecuaciones de las rectas tangentes paralelas a la recta $x + 3y - 4 = 0$.

SOLUCIÓN:

Derivando implícitamente la ecuación de la elipse:

$$2x + 6xy' + 6y + 50yy' = 0$$

$$y'(3x + 25y) = -x - 3y \quad ; \qquad y' = -\frac{x + 3y}{3x + 25y}$$

La pendiente de la tangente a la elipse en cualquier punto es:

$$m = -\frac{x + 3y}{3x + 25y}$$

De la ecuación de la recta: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$, la pendiente de la recta es:

$$m_r = -\frac{1}{3}$$

Igualando las dos pendientes:

$$-\frac{x + 3y}{3x + 25y} = -\frac{1}{3} \quad ; \qquad 3(x + 3y) = 3x + 25y$$

$$3x + 9y = 3x + 25y \quad ; \quad 16y = 0 \text{ , luego } y = 0$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la elipse:

$$x^2 + 6(0) + 25(0) = 16 \;; \quad x^2 = 16 \,, \quad x_1 = 4 \,, \quad x_2 = -4$$

Los puntos de tangencia son, $P_1(4, 0)$ y $P_2(-4, 0)$

Las ecuaciones de las tangentes son:

En: $P_1(4, 0)$ $\quad y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 4)\;; \quad 3y = -x + 4\;; \quad x + 3y - 4 = 0$

En: $P_2(-4, 0)$ $\quad y - 0 = -\frac{1}{3}(x + 4)\;; \quad 3y = -x - 4\;; \quad x + 3y + 4 = 0$

III.18 Obtener el ángulo que forman al cortarse las curvas de ecuaciones:

$$y = x^2 \ , \quad y = 2 - x^2 \ .$$

SOLUCIÓN:

Para determinar los puntos de intersección, se resuelven como simultáneas las ecuaciones.

Por igualación: $x^2 = 2 - x^2$, $2x^2 = 2$; $x^2 = 1$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$
$y_1 = y_2 = 1$

Los puntos de intersección son: $P_1 (1 , 1)$, $P_2 (-1 , 1)$.

Las pendientes de las rectas tangentes son: $m_1 = 2x$, $m_2 = -2x$

En $P_1 (1 , 1)$: $m_1 = 2$, $m_2 = -2$

$$tan\varphi = \frac{-2-2}{1 + (2)(-2)} = \frac{4}{3} = 1.333 \quad \varphi = ang\,tan\,1.333 \ ; \quad \varphi = 53° \ 08'$$

En $P_2 (-1 , 1)$, el ángulo es el mismo, por simetría.

III.19 Calcular el ángulo que forman al cortarse las curvas de ecuaciones

$y = \sqrt{x+1}$ .... (1)

$y = \sqrt{13 - x^2}$ .... (2)

SOLUCIÓN:

Punto(s) de intersección, resolviendo como simultáneas las ecuaciones:

$\sqrt{x+1} = \sqrt{13 - x^2}$; $x + 1 = 13 - x^2$; $x^2 + x - 12 = 0$; $(x - 3)(x + 4) = 0$

$x_1 = 3$, $x_2 = -4$ por lo cual, $y_1 = 2$, $y_2 \notin IR$, el único punto de intersección $P (3 , 2)$

De (1): $f_1'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$, luego, $f_1'(3)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}=m_1$

De (2): $f_2'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{13-x^2}}$, así que,

$$f_2'(3)=-\frac{3}{\sqrt{13-9}}=-\frac{3}{\sqrt{4}}=-\frac{3}{2}=m_2$$

$$tan\,\varphi=\frac{-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}=\frac{\frac{-6-1}{4}}{\frac{8-3}{8}}=-\frac{14}{5}=-2.8 \quad (\ \varphi \text{ es obtuso })$$

$\pi-\varphi=ang\tan 2.8=70^\circ 21'$, luego $\varphi=180^\circ-70^\circ 21'$ $\quad \varphi=109^\circ 39'$

III.20 Demostrar que la curva de ecuación

$$x^2-xy+y^2-3=0 \text{ .... } (1)$$

y la recta $x+y=0$ .... (2) se cortan en ángulo recto.

SOLUCIÓN:

Puntos de intersección. Resolviendo como simultáneas las ecuaciones.

De (2) $y=-x$, sustituyendo este valor en (1) :

$$x^2-x(-x)+(-x)^2-3=0\,,\quad 3x^2=3\,;\quad x^2=1\,,\quad x=\pm 1$$

$$x_1=1\,,\quad y_1=-1\,,\quad x_2=-1\,,\quad y_2=1$$

Los puntos de intersección son $P_1(1,-1)$ y $P_2(-1,1)$

Derivando implícitamente en (1) :

$$2x - xy' - y + 2yy' = 0 \;; \quad y'(2y - x) = y - 2x \;; \quad y' = \frac{y - 2x}{2y - x} = m_1$$

De $\quad (2) \qquad y' = -1 \,, \qquad m_2 = -1$

En $\quad P_1(1, -1) \,, \qquad m_1 = \dfrac{-1 - 2(1)}{2(-1) - 1} = \dfrac{-3}{-3} = 1 \;; \quad m_2 = -1$

Las pendientes son recíprocas y de signo contrario, entonces el ángulo es recto $\varphi_1 = 90°$.

En $\quad P_2(-1, 1) \,, \quad m_1 = \dfrac{1 - 2(-1)}{2(1) - (-1)} = \dfrac{3}{3} = 1 \;; \quad m_2 = -1$

Como las pendientes son recíprocas y de signo contrario, el ángulo es recto $\varphi_2 = 90°$

III.21 Determinar el ángulo que forman al cortarse las curvas:

$$x^2 - y^2 - 5 = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$4x^2 + 9y^2 - 72 = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

SOLUCIÓN:

Puntos de intersección. Se resuelven como simultáneas las ecuaciones.

De $\quad (1) \qquad 9x^2 - 9y^2 - 45 = 0$

De $\quad (2) \qquad \underline{4x^2 + 9y^2 - 72 = 0}$

Sumando: $\quad 13x^2 \qquad - 117 = 0$

$$13x^2 = 117 \;; \quad x^2 = \frac{117}{13} = 9 \;; \quad x = \pm\sqrt{9} \qquad x_1 = 3 \,, \quad x_2 = -3$$

De $\quad (1) \quad y^2 = x^2 - 5 \;; \; y = \sqrt{x^2 - 5} \;; \quad y = \sqrt{9 - 5} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Los puntos de intersección son: $P_1(3, 2)$, $P_2(3, -2)$, $P_3(-3, 2)$ y $P_4(-3, -2)$.

Como se trata de una hipérbola y una elipse, ambas con centro en el origen, el ángulo que forman en cada punto de intersección es el mismo por simetría.

De (1) $\quad 2x - 2yy' = 0 \; ; \qquad y' = \dfrac{x}{y}$

De (2) $\quad 8x + 18yy' = 0 \; ; \qquad y' = -\dfrac{4x}{9y} \; ; \qquad y' = -\dfrac{4x}{9y}$

En $P_1(3, 2)$ se tiene:

$$m_1 = \frac{x_1}{y_1} = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{4x_1}{9y_1} = -\frac{4(3)}{9(2)} = -\frac{2}{3} = m_2$$

Como las pendientes m_1 y m_2 son recíprocas y de signo contrario, el ángulo formado φ es recto $\varphi = 90°$

III.22 Un arco parabólico está apoyado en dos puntos a nivel, distantes $25.00\ m$ uno del otro. El punto más alto del arco está $5.00\ m$ arriba del nivel de los apoyos. Calcular el ángulo que forma el arco con la vertical en los puntos de apoyo.

SOLUCIÓN:

La ecuación de la parábola es del tipo:

$$x^2 = 4py$$

Luego $\quad p = \dfrac{x^2}{y(4)}$

En el punto $A(-12.5, \; -5)$, el valor de p es

$$p = \frac{(-12.5)^2}{(-5)4} = -7.81$$

Entonces la ecuación es: $y = \frac{x^2}{4p} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4p} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2p}$

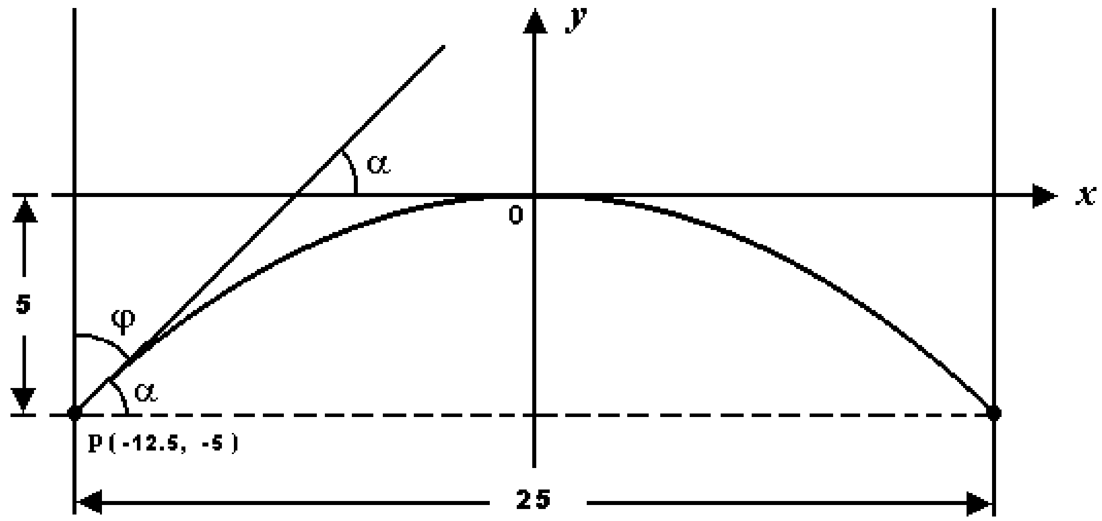
$$\frac{dy}{dx} = -0.064\,x$$

En $A(-12.5\,,\ -5):\ \frac{dy}{dx} = -0.064\,(-12.5) = 0.80$

La pendiente de la recta tangente en A es:

$m = tan\alpha = 0.80$, luego $\alpha = ang\ tan\ 0.80 = 38.6598^\circ$

$\alpha = 38^\circ\ 39'\ 35''$ Como $\alpha + \varphi = 90^\circ \Rightarrow \varphi = 51^\circ\ 20'\ 25''$



III.23 Un hombre de $1.75\ m$ de estatura camina alejándose de un arbotante con foco a una altura de $4.50\ m$ a razón de $4.4\ \frac{m}{min}$. ¿A razón de cuántos metros por minuto se alarga su sombra?

SOLUCIÓN:

$H = 4.50\ m$, $h = 1.75\ m$, $\frac{dx}{dt} = 4.4\ \frac{m}{min}$

Longitud de la sombra: y

Se pide $\frac{dy}{dt}$

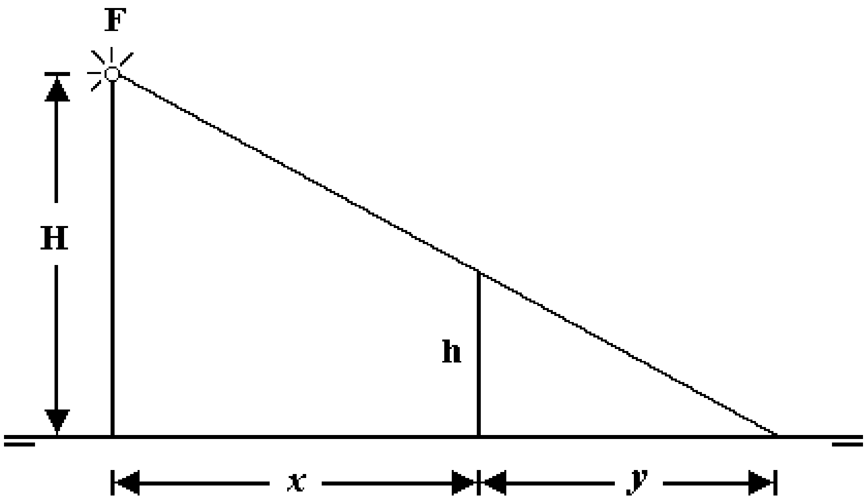
De la figura $\dfrac{y}{1.75} = \dfrac{x+y}{4.50}$

$$4.50\,y = 175\,x + 1.75\,y \quad \Rightarrow \quad 2.75\,y = 1.75\,x$$

Derivando respecto al tiempo t :

$$2.75\,\frac{d\,y}{d\,t} = 1.75\,\frac{d\,x}{d\,t}\ ; \qquad 2.75\,\frac{d\,y}{d\,x} = 1.75\,(\,4.4\,)\ ;$$

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{1.75\,(\,4.4\,)}{2.75} = 2.8 \qquad \frac{d\,y}{d\,t} = 2.8\,\frac{m}{min}$$



III.24 Una escalera de 5 metros de longitud está apoyada en un piso horizontal y recargada en un muro vertical. El pie de la escalera resbala alejándose del muro con una rapidez de 2 metros por segundo. ¿Con qué rapidez se desliza hacia abajo el extremo superior de la escalera cuando el pie está a 3 metros del muro?.

SOLUCIÓN:

$\dfrac{d\,x}{d\,t} = 2\,\dfrac{m}{s}$ se pide $\dfrac{d\,y}{d\,t}$ cuando $x_1 = 3m$

De la figura: $x^2 + y^2 = 25$

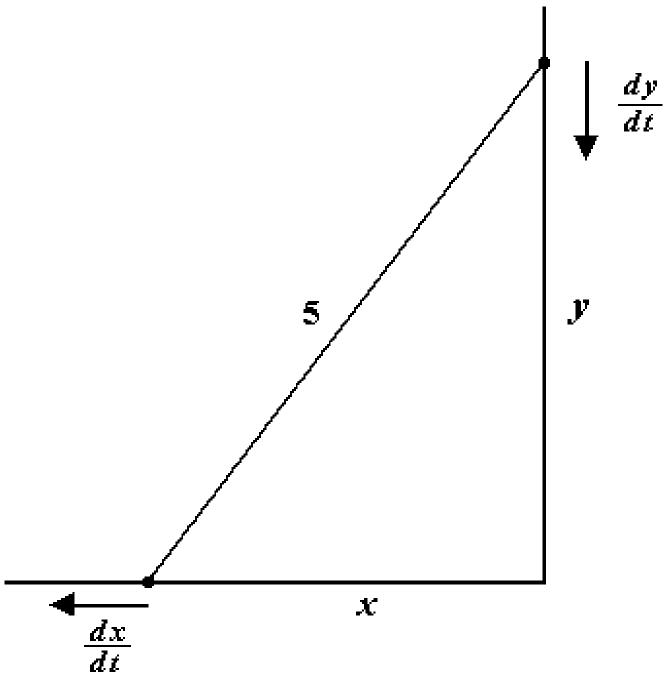
Derivando con respecto al tiempo t :

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \ , \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $x_1 = 3m \ , \quad y_1 = \sqrt{25 - x_1^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4m$

Sustituyendo valores en $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4}(2) = -\frac{3}{2} = -1.50 \qquad \frac{dy}{dt} = -1.50\,\frac{m}{s}$$



III.25 En un círculo cuyo radio crece con una rapidez de $3\,cm$ por minuto, está inscrito un cuadrado. ¿Con qué rapidez aumenta el área del cuadrado cuando el radio del círculo mide un decímetro?

SOLUCIÓN:

Se tiene, $\frac{dr}{dt} = 3\,\frac{cm}{min}$

Siendo A el área del cuadrado, se pide $\dfrac{dA}{dt}$ cuando $r = 1\ dm$

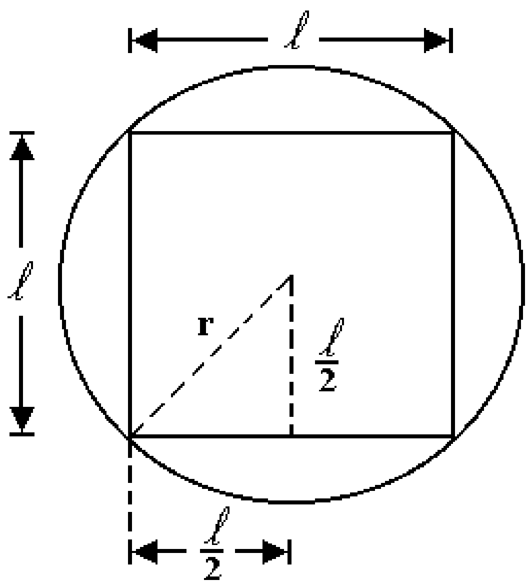
Por la regla de la cadena $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{dA}{dr}\dfrac{dr}{dt}$

De la figura, $r^2 = 2\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 = \dfrac{\ell^2}{2} \Rightarrow \ell^2 = 2r^2 \qquad A = \ell^2 = 2r^2$

$\dfrac{dA}{dr} = 4r \ , \qquad \dfrac{dA}{dt} = 4r\dfrac{dr}{dt} = 4r\,(3) = 12r$

Si $r = 1\,dm = 10\,cm$, $\dfrac{dA}{dt} = 12\,(10)$

$$\frac{dA}{dt} = 120\ \frac{cm^2}{min}$$



III.26 Un bote B navega perpendicularmente a la costa hacia un muelle $"M"$ a razón de $15\,km/h$. Un foco $"F"$ está a $3\,km$ del muelle sobre la costa. ¿Con qué rapidez se acerca el bote al faro cuando está a $4\,km$ del muelle?

SOLUCIÓN:

$$\frac{dx}{dt} = -15\,\frac{km}{h}$$

Se pide $\frac{dy}{dt}$ cuando $x_1 = 4\,km$

De la figura $y^2 = x^2 + 9$

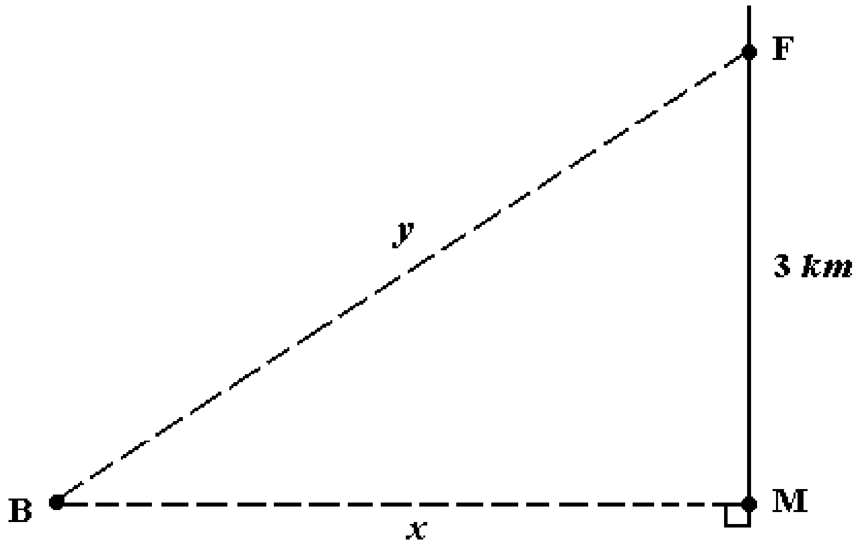
Derivando respecto al tiempo t

$$2y\,\frac{dy}{dt} = 2x\,\frac{dx}{dt}\ ; \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\,\frac{dx}{dt}$$

Cuando $x_1 = 4$, $\quad y = \sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5\,km$

Sustituyendo valores en $\frac{dy}{dt}$: $\quad \frac{dy}{dt} = \frac{4}{5}(-15) = -12$

$$\frac{dy}{dt} = -12\,\frac{km}{h}$$



III.27 Se está vaciando arena sobre un montón de forma cónica a razón de $20\ \frac{m^3}{min}$ La altura del montón es siempre igual al radio de su base. ¿Con qué rapidez está aumentando la altura del montón cuando el radio mide 3 metros?.

SOLUCIÓN:

Sea V el volumen de arena

$$\frac{dv}{dt} = 20\ \frac{m^3}{min}$$

Se pide $\frac{dh}{dt}$ cuando $r_1 = 3m$

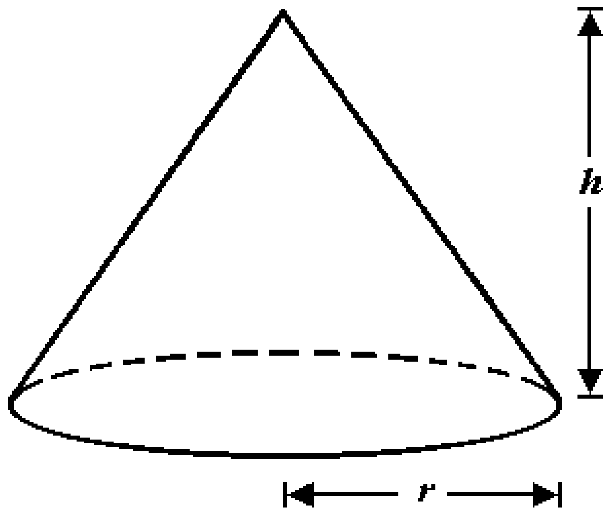
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Como $h = r$, $V = \frac{1}{3}\pi h^3$, luego: $h^3 = \frac{3v}{\pi}$

Derivando respecto al tiempo t

$$3h^2\frac{dh}{dt} = \frac{3}{\pi}\frac{dv}{dt}\ , \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h^2}\frac{dv}{dt}$$

Sustituyendo valores $\frac{dh}{dt} \approx 0.70735\ \frac{m}{min}$



III.28 Un avión vuela a $8\ km$ de altura en línea recta hacia la ubicación de un radar localizado a nivel del suelo. Si la distancia entre el avión y el radar está disminuyendo a razón de $400\ km/h$, cuando esta distancia es de $10\ km$, ¿cuál es la velocidad del avión?

SOLUCIÓN:

Sea $"z"$ la distancia entre el avión y el radar, $\frac{dz}{dt} = 400\ km/h$

Se pide $V_A = \frac{dx}{dt}$ cuando $z_1 = 10\ km$

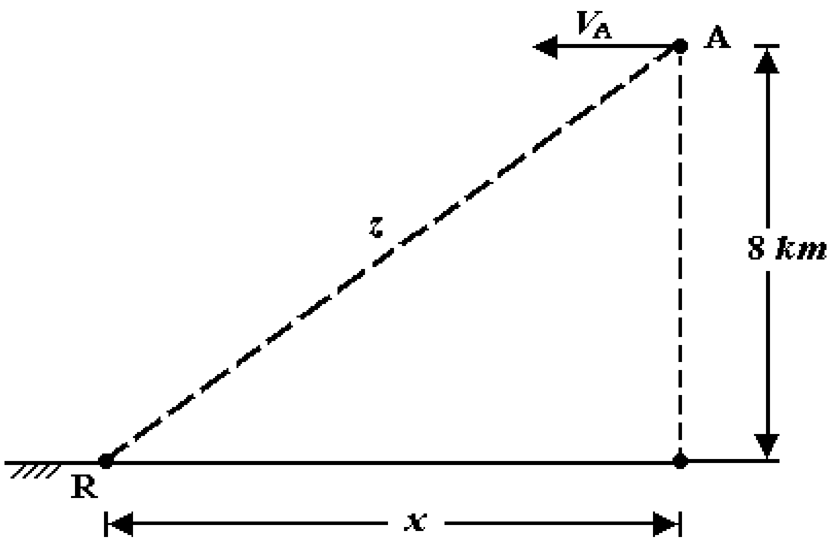
De la figura $z^2 = x^2 + 64$

Derivando respecto al tiempo $"t"$

$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$; luego : $\frac{dx}{dt} = z\frac{\frac{dz}{dt}}{x} = V_A$

Sí $z_1 = 10\ km$, $x_1 = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6\ km$

$V_A = \frac{10\ (400)}{6} = \frac{2000}{3}\ \frac{km}{h}$ $V_A = 666.66\ \frac{km}{h}$



III.29 Si un faro $"F"$ está en una pequeña isla a $2\,km$ de la costa que es recta. El haz luminoso del faro gira a una velocidad constante de 6 grados por segundo. ¿Con qué rapidez va desplazándose el rayo de luz a lo largo de la costa en un punto que se encuentra a $3\,km$ del punto $"P"$ más cercano al faro?

SOLUCIÓN:

La velocidad angular del rayo de luz es: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{6\pi}{180} = \frac{\pi}{30}\ \frac{rad}{seg}$

Se pide $\frac{dx}{dt}$ cuando $x_1 = 3\,km$

De la figura: $tan\,\theta = \frac{x}{2}$ luego $x = 2\,tan\,\theta$

Derivando respecto al tiempo $"t"$

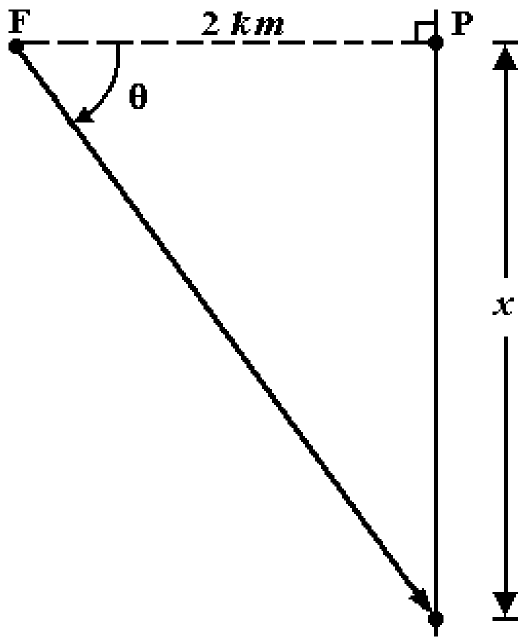
$$\frac{dx}{dt} = 2\,sec^2\,\theta\,\frac{d\theta}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Cuando $x_1 = 3$, $tan\theta = \frac{3}{2}$, por lo cual: $sec^2\,\theta = tan^2\theta + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$

sustituyendo valores (1), queda

$$\left.\frac{dx}{dt}\right]_{x_1} = 2\left(\frac{13}{4}\right)\left(\frac{\pi}{30}\right) = \frac{13\pi}{60}\ ; \quad \left.\frac{dx}{dt}\right]_{x_1} = \frac{13\pi}{60}\ \frac{km}{s}$$

En forma aproximada $\left.\frac{dx}{dt}\right]_{x_1} \approx 0.68068\ \frac{km}{s}$



III.30 Empleando diferenciales, obtener un valor aproximado de $\sqrt{146}$.

SOLUCIÓN:

Sea $y = \sqrt{x} = f(x)$

Si $x_1 = 144$, $y_1 = \sqrt{144} = 12$

$x_2 = 146$, $y_2 = \sqrt{146} = y_1 + \Delta y \approx y_1 + dy$

$\Delta x = x_2 - x_1 = 146 - 144 = 2$, $\Delta x = dx = 2$

Se requiere obtener dy

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{2(12)} = \frac{1}{12} = 0.0833$$

$\sqrt{146} \approx 12 + 0.0833$, $\sqrt{146} \approx 12.0833$

III.31 Por medio de diferenciales, calcular un valor aproximado de $sen\,31°\,30'$

SOLUCIÓN:

Sea $y = sen\,x$

$x_1 = 30°$, entonces, $y_1 = sen\,30° = 0.5$

si, $x_2 = 31°\;30'$, $y_2 = sen\,31°\,30' = y_1 + \Delta y \approx y_1 + dy$

$\Delta x = 31°\,30' - 30° = 1°\,30'$

En radianes $\Delta x = 1.5\,\frac{\pi}{180} \approx 1.5\,(0.01745) = 0.02618 = dx$

$$dy = cos\,x\,dx = cos\,30°\,(0.02618) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(0.02618) \approx 0.02267$$

$sen\,31°\,30' \approx 0.2267 + 0.5$

$sen\,31°\,30' \approx 0.52267$

III.32 Se trata de pintar exteriormente un tanque elevado esférico de $2.00\ m$ de radio con una capa de pintura de $0.0005\ m$ de espesor en fresco. Empleando diferenciales, calcular un valor aproximado de la cantidad de litros de pintura, necesarios.

SOLUCIÓN:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $\Delta r = 0.0005 m$, se requiere calcular $dv \approx \Delta v$ para

$r_1 = 2.00 m$ y $\Delta r = dr = 0.0005 m$

$$dv = \frac{4}{3}\pi\, 3r^2\, dr = 4\pi r^2\, dr$$

$$dv = 4\pi(2)^2(0.0005) = 0.02513\ m^3$$

$$dv = 25.13\ litros$$

III.33 Dada la función $y = x^2 - 3x + 1$ calcular Δy y dy

a) Para cualquier valor de x y Δx

b) para $x_1 = 2$ y $\Delta x = 0.1$

c) para $x_1 = 2$ y $\Delta x = 0.01$

d) para $x_1 = 2$ y $\Delta x = 0.001$

SOLUCIÓN:

a) $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1$

$$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - x^2 + 3x + 1 =$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x =$$

$$\Delta y = (2x - 3)\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$d\,y = f'(x)\,d\,x, \quad d\,y = (2x-3)\,d\,x = (2x-3)\,\Delta x$$

Los resultados de los incisos b), c), y d) se tienen en la siguiente tabla con $\Delta y = (2x-3)\,\Delta x + (\Delta x)^2$, $d\,y = (2x-3)\,\Delta x$ y $\in \Delta x = \Delta y - d\,y$

x	Δx	Δy	$d\,x$	$\Delta y - d\,x$
2	0.1	0.11	0.1	0.01
2	0.01	0.101	0.01	0.0001
2	0.001	0.001001	0.001	0.000001

Se observa que a medida que Δx disminuye, la diferencia $\Delta y - d\,x$ es menor

III.34 Calcular el error absoluto y el error relativo que se comete al emplear la diferencial de la variable dependiente en lugar de su incremento.

$$y = \frac{3x}{x^2+2} \quad , \quad x_1 = 2, \quad \Delta x = d\,x = -0.2$$

SOLUCIÓN:

$$d\,y = \frac{\left(x^2+2\right)3 - 3x\,(2x)}{\left(x^2+2\right)^2}\,d\,x = \frac{-3x^2+6}{\left(x^2+2\right)^2}\,d\,x$$

$$d\,y = \frac{\left[-3(4)+6\right]\left[-0.2\right]}{(4+2)^2} = 0.033333$$

$$\Delta y = \frac{3(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)^2+2} - \frac{3x}{x^2+2} = \frac{3(1.8)}{5.24} - \frac{6}{6} = 0.030534$$

El error absoluto es $e_a = \left|\,\Delta y - d\,y\,\right| = \left|\,0.030534 - 0.033333\,\right|$

$$e_a = 0.002799$$

el error relativo es $e_r = \dfrac{e_a}{\Delta y} = \dfrac{0.002799}{0.030534} = 0.091668$

III.35 Al medir la arista de un cubo se comete un error del 1%, determinar el error relativo y el error en por ciento % que se comete al calcular el volumen del cubo con la arista medida.

SOLUCIÓN:

$v = x^3$, $\quad dv = 3x^2\, dx$

El error en por ciento al medir la arista es $\quad 100\,\dfrac{dx}{x} = 1$

El correspondiente error relativo es $\quad \dfrac{dx}{x} = 0.01$

El error absoluto en el volumen es:

$$dv = 3x^2\,\frac{dx}{x}\,x = 3x^3\,\frac{dx}{x}$$

$$dv = 3x^3\,(\,0.01\,) = 0.03\,x^3$$

El error relativo en el volumen es:

$$\frac{dv}{v} = \frac{3x^2\,dx}{x^3} = 3\,\frac{dx}{x} = 3\,(\,0.01\,) = 0.03$$

$$\frac{dv}{v} = 0.03$$

El error en porcentaje es: 3 %

III.36 Obtener la diferencial de arco de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = r^2$$

SOLUCIÓN :

Derivando con respecto a x :

$2x + 2y \dfrac{dy}{dx} = 0$, luego $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

Sustituyendo este valor en la expresión $ds = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx} \right)^2} \, dx$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{y} \right)^2} \, dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} \, dx = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} \, dx = \sqrt{\frac{r^2}{y^2}} \, dx = \frac{r}{\sqrt{y^2}} \, dx$$

pero, $y^2 = r^2 - x^2$, entonces: $ds = \dfrac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

III.37 Obtener la diferencial de arco de la curva de ecuación:

$$y = \frac{1}{3} \left(x^2 + 2 \right)^{\frac{3}{2}}$$

SOLUCIÓN:

$ds = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx} \right)^2} \, dx$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2} \, \dfrac{1}{3} \left(x^2 + 2 \right)^{\frac{1}{2}} 2x = x \left(x^2 + 2 \right)^{\frac{1}{2}}$

$$ds = \sqrt{1 + \left[x \left(x^2 + 2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2} \, dx = \sqrt{1 + x^2 \left(x^2 + 2 \right)} \, dx = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} \, dx =$$

$$ds = \sqrt{(x^2 + 1)^2} \qquad dx = (x^2 + 1) \, dx$$

III.38 Obtener la diferencial de arco de la curva de ecuación:

$$y = \theta - sen\,\theta \;, \qquad y = 1 - cos\,\theta$$

SOLUCIÓN:

$d\,x = (1 - cos\,\theta)\,d\,\theta \;, \qquad d\,y = sen\,\theta\,d\,\theta$

Como

$$d\,s = \sqrt{(d\,x)^2 + (d\,y)^2}$$

$$d\,s = \sqrt{(1 - cos\,\theta)^2\,(d\,\theta)^2 + sen^2\,\theta\,(d\,\theta)^2}$$

$$= \sqrt{1 - 2\,cos\,\theta + cos^2\,\theta + sen^2\,\theta}\;\;d\,\theta$$

$$= \sqrt{2 - 2\,cos\,\theta}\;\;d\,\theta$$

$$d\,s = \sqrt{2\,(1 - cos\,\theta)}\;\;d\,\theta$$

LA DERIVADA



E J E R C I C I O S P R O P U E S T O S

Obtener la derivada por el método de los 4 pasos

III.39 $y = x^2 - 3x + 4$

III.40 $y = \dfrac{1}{x+1}$

III.41 $y = \dfrac{x+2}{x-2}$

III.42 $y = \sqrt{x^2 + 4}$

III.43 $y = 2\sqrt{3 - x^2}$

III.44 $y = \sqrt[3]{x - 2}$

Obtener la derivada de las siguientes funciones

III.45 $y = 4x^3 - 2x^2 + 6x - 9$

III.46 $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x}$

III.47 $g(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x}$ $\quad a, b, c \in IR$

III.48 $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

III.49 $y = \left(3x^2\right)^3 - \left(2x^3\right)^4$

III.50 $f(x) = \left(x^2 - 3x\right)^3$

III.51 $y = (2x)^2 (4x - 7)$

III.52 $y = (x^2 - 3)(2x + 1)$

III.53 $g(x) = x(2x - 3)(2x + 3)$

III.54 $y = \dfrac{3 + 2x - 4x^2}{\sqrt{x}}$

III.55 $r = \sqrt{1 - 2\theta}$

III.56 $s = 2t^2 \left(2 - 3t^2 \right)^3$

III.57 $f(x) = \sqrt[3]{4 - 9x}$

III.58 $y = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

III.59 $f(x) = \left(a + \dfrac{b}{r^2} \right)^3$

III.60 $y = x^2 \sqrt{a + bx^2}$

III.61 $f(x) = \dfrac{4 + x^2}{4 - x^2}$

Obtener la derivada y calcular su valor en el punto indicado

III.62 $y = x\sqrt{9 + x^2}$; $x_1 = 4$

III.63 $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 16}}{x}$; $x_1 = -3$

III.64 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{8 - x^2}}$; $x_1 = 2$

III.65 $r = \sqrt{\dfrac{1 - 2s}{1 + 2s}}$; $s_1 = 0$

III.66 $y = \sqrt{\dfrac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}}$; $x_1 = 1$

III.67 $s = \sqrt[3]{\dfrac{2 + 3t}{2 - 3t}}$; $t_1 = 1$

III.68 $r = \theta\sqrt{2\theta^2 + 1}$; $\theta_1 = 2$

III.69 $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}{x}$; $x_1 = 4$

III.70 $y = \left(\dfrac{x^3 - 1}{2x^3 + 1}\right)^4$; $x_1 = -1$

III.71 $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}\left(x^2 + 1\right)$; $x_1 = 5$

Derivar cada una de las siguientes funciones

III.72 $y = ang\,sen\,\frac{x}{2}$

III.73 $f(x) = ang\cot\frac{x}{a}$

III.74 $y = ang\sec\frac{1}{x}$

III.75 $r = ang\csc(4\theta)$

III.76 $y = ang\cos\sqrt{x}$

III.77 $y = x^2\,ang\cos x$

III.78 $f(x) = ang\,sen\left(3x - 4x^3\right)$

III.79 $g(x) = \frac{ang\,sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

III.80 $y = \sqrt{ang\cos 3x}$

III.81 $h(x) = \sqrt{x}\;ang\tan\frac{x}{4}$

Comprobar las siguientes derivadas

III.82 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}} - ang\,sen\,\dfrac{x}{3}$; $f'(x) = x^2 \left(9 - x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$

III.83 $g(x) = x\sqrt{4 - x^2} + 4\,ang\,sen\,\dfrac{x}{2}$; $g'(x) = 2\sqrt{4 - x^2}$

III.84 $h(x) = \sqrt{4 - x^2} + 2\,ang\,sen\,\dfrac{x}{2}$; $h'(x) = \sqrt{\dfrac{2 - x}{2 + x}}$

III.85 $y = ang\tan\,\dfrac{x + 3}{1 - 3x}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

III.86 $y = 2\,ang\cos\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) + \sqrt{4x - x^2}$; $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{4 - x}{x}}$

Determinar $\dfrac{dy}{dx}$ y su valor en el punto indicado

III.87 $x^2 + y^2 = 25$; $P(-3, 4)$

III.88 $x^2 - y^2 = 16$; $P(5, -3)$

III.89 $x - y^2 = 3$; $P(7, 2)$

III.90 $xy = 12$; $P(2, 6)$

III.91 $y^2 - 2xy + 3x^2 = 1$; $P(0, -1)$

III.92 $x^3 + y^3 = 7$; $P(-1, 2)$

III.93 $xy^2 = 12$; $P(3, -2)$

III.94 $xy^2 - 3x^2 + 4 = 0$; $P(-1, 1)$

III.95 $2x^2y^2 - 3xy + 1 = 0$; $P(1, 1)$

III.96 $\sqrt{3x + 2y}\,(x - y) = 8$; $P(4, 2)$

III.97 $3x^2y^3 + 4xy^2 = 6 + \sqrt{y}$; $P(1, 1)$

Obtener $\frac{dy}{dx}$

III.98 $2y^2 + xy + x^2 = 28$

III.99 $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1$

III.100 $\sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 5$

III.101 $2xy + \pi\, sen\, y = 2\pi$

III.102 $x + tan(xy) = 0$

III.103 $\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = 1$

III.104 $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

III.105 $2xy + y^2 = x + y$

III.106 $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$

III.107 $y^2 \left(x^2 + 1 \right) = x^2 - 1$

III.108 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

Obtener $\frac{dy}{dx}$ de las funciones dadas paramétricamente

III.109 $x = t^3$; $y = 3t$

III.110 $x = 3t$; $y = \frac{2}{t}$

III.111 $x = t^2$; $y = t^3 + 3t$

III.112 $x = 1 + \frac{1}{t}$; $y = 1 - \frac{1}{t}$

III.113 $x = \sqrt{2t^2 + 1}$; $y = (2t + 1)^2$

III.114 $x = \frac{t-1}{t+1}$; $y = \frac{t+1}{t-1}$

III.115 $x = t^{-2}$; $y = \sqrt{t^2 + 12}$

III.116 $x = tan\theta$; $y = cot\theta$

III.117 $x = 3\, cos\alpha$; $y = 5\, sen\alpha$

III.118 $x = sen\, 2\theta$; $y = cos\theta$

III.119 $x = 2\, cost$; $y = 2\, sent$

III.120 $x = 4a\ cos^3 t$; $y = 4a\ sen^3 t$

III.121 $x = (\, 2\, cos\, t - cos\ 2t\,)$; $y = a\, (\, 2\, sen\, t - sen\ 2t\,)$

Calcular $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ y su valor para el valor x dado

III.122 $y = \sqrt{ax} + \frac{a^2}{\sqrt{ax}}$; $x_1 = a$

III.123 $y = \sqrt{25 - 3x}$; $x_1 = 3$

III.124 $y = x\sqrt{x^2 + 9}$; $x_1 = 4$

III.125 $x^2 - 4y^2 = 9$; $x_1 = 5$, $(y > 0)$

III.126 $x^2 + 4xy + y^2 + 3 = 0$; $x_1 = 2$, $(y < 0)$

III.127 $y = \sqrt[3]{x^2 + 4}$; $x_1 = 2$

III.128 $x^2 - y^2 = 7$; $x_1 = 4$

Comprobar los valores de $\dfrac{d^2 y}{d x^2}$

III.129 $y = (-4x + 9)^2$; $\dfrac{d^2 y}{d x^2} = 32$

III.130 $y = 10x^{-2}$; $\dfrac{d^2 y}{d x^2} = 60x^{-4}$

III.131 $y = x^3 + 8x^2 - \dfrac{2}{x^4}$; $\dfrac{d^2 y}{d x^2} = 6x + 16 - 40x^{-6}$

III.132 $y = x^2 (3x - 4)^3$; $\dfrac{d^2 y}{d x^2} = (3x - 4)(180x^2 - 192x + 32)$

III.133 $y = \dfrac{2x - 3}{x + 2}$; $\dfrac{d^2 y}{d x^2} = 14(x + 2)^{-3}$

III.134 $y = x\, sen x$; $\dfrac{d^2 y}{d x^2} = -x\, sen x + 2\cos x$

III.135 $y = \dfrac{1}{3 + 2\, cos x}$; $\dfrac{d^2 y}{d x^2} = \dfrac{4\cos^2 x + 6\cos x + 8 sen^2 x}{(3 + 2\cos x)}$

III.136 $y = sec x$; $\dfrac{d^2 y}{d x^2} = \sec^3 x + \tan^2 x \sec x$

Determinar la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la curva en el punto dado.

III.137 $y = x^3 - 3x$ en $P(2, 2)$

III.138 $y = \dfrac{2x+1}{3-x}$ en $P(2, 5)$

III.139 $y = \sqrt{x}$ en $P(4, 2)$

III.140 $y^2 = 4 - x^2$ en $P_1\left(1, \sqrt{3}\right)$ y en $P_2\left(1, -\sqrt{3}\right)$

III.141 $x^2 + xy - y^2 = 1$ en $P(2, 3)$

III.142 $x^2 y^2 = 9$ en $P(-1, 3)$

III.143 $\dfrac{x-y}{x-2y} = 2$ en $P(3, 1)$

III.144 $(y-x)^2 = 2x + 4$ en $P(6, 2)$

III.145 $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$ en $P(-2, 1)$

III.146 $\tan y = x$ en $P\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$

III.147 $3y + \cos y = x^2$ en $P(1, 0)$

III.148 $2x^2 - xy + y^2 = 16$ en $P(3, 2)$

III.149 $y^2 + 2y - 4x + 4 = 0$ en $P(1, -2)$

III.150 $9x^2 + 4y^2 = 72$ en $P(2, -3)$

III.151 Obtener las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 58$ que son paralelas a la recta $3x + 7y = 19$.

III.152 Determinar las ecuaciones de las rectas normales a la hipérbola $4x^2 - y^2 = 36$ que son paralelas a la recta $2x - 5y = 4$.

III.153 Determinar los puntos de la curva $y = \frac{5}{1-2x}$ donde la recta tangente es paralela a la recta $2x - 5y + 5 = 0$

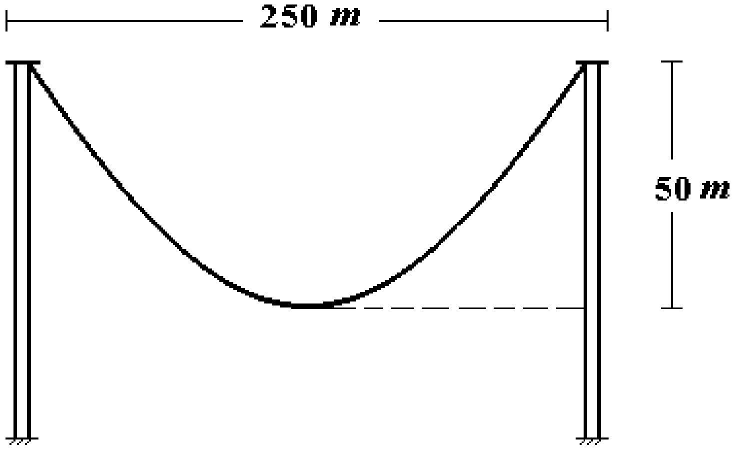
III.154 Obtener el punto de la curva $y^2 = 2x^3$ donde la recta tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$

III.155 Determinar las ecuaciones de las rectas normales a la curva $xy + 2x - y = 0$ que sean paralelas a la recta $2x + y = 0$.

III.156 ¿En qué otro punto corta a la curva la recta que es normal a $y = x^2 + 2x - 3$ en $P(1, 0)$?

III.157 Determinar los dos puntos en los cuales la curva de ecuación $x^2 + xy + y^2 = 7$ corta al eje de las abscisas; hacer ver que las tangentes a la curva en estos puntos son paralelas. ¿Cuál es el valor de la pendiente de estas tangentes?

III.158 El cable de un puente colgante está unido a dos pilares separados entre si $250\ m$ y al mismo nivel. Considerando que dicho cable adquiere la forma de una parábola con su punto más bajo a $50\ m$ del nivel de los puntos de suspensión, calcular el ángulo que forma el cable con un pilar en su punto de apoyo.



III.159 Calcular el área del triángulo que forman con el eje de las abscisas, la tangente y la normal a la curva $y = 6x - x^2$ en el punto de abscisa 5.

Obtener el ángulo que forman al cortarse las curvas dadas por sus ecuaciones.

III.160 $3x + y = 5 \quad ; \quad 2x - y = 4$

III.161 $y = \sqrt{3}\,x - 1 \quad ; \quad y = -\sqrt{3}\,x + 2$

III.162 $y = \sqrt{\frac{3}{4} + x} \quad ; \quad y = \sqrt{\frac{3}{4} - x}$

III.163 $y = x^3 \quad ; \quad y = \sqrt{x}$

III.164 $y = x^2 \quad ; \quad y = \sqrt[3]{x}$

III.165 $x^2 + y^2 = 2 \quad ; \quad y = \sqrt{x}$

III.166 Un vehículo se mueve a razón de 15 kilómetros por hora acercándose en línea recta a la base de una torre de 36 metros de la altura. ¿Con qué rapidez se acerca al punto más alto de la torre cuando está a 48 metros. de la base?.

III.167 Un lanchón se acerca a un muelle por medio de cable amarrado en una bita del muelle. El cable se enrolla en un malacate colocado en una cubierta del lanchón, a razón de 2.40 metros por minuto. La cubierta del lanchón esta a 4.50 metros debajo del nivel del muelle. ¿Con qué rapidez se mueve el lanchón cuando está a 6 metros del muelle?

III.168 Un tanque tiene la forma de un cono invertido, su altura es de 16 metros y su radio mide 4 metros. El tanque se está llenando con agua a razón de 2 metros cúbicos por minuto. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando la profundidad es de 5 metros?.

III.169 El gas de un globo esférico escapa a razón de 2 metros cúbicos por minuto. Determinar la rapidez con que disminuye el área de la superficie del globo cuando el radio mide 1.20 metros.

III.170 Una placa metálica de forma circular se dilata por el aumento de la temperatura de modo que su radio aumenta con una rapidez de 0.01 centímetros por segundo. ¿Con qué rapidez aumenta su área cuando el radio mide 2 decímetros?

III.171 Un avión vuela a 10 kilómetros de altura en línea recta hacia un Aeropuerto. Si la distancia entre un avión y el Aeropuerto esta disminuyendo a razón de 500 kilómetros por hora cuando esta distancia es de 100 kilómetros. ¿Cuál es la velocidad del avión?.

III.172 Por medio de diferenciales, obtener un valor aproximado de $\sqrt{27}$.

III.173 Empleando diferenciales, calcular un valor aproximado de $\sqrt[3]{28}$

III.174 Obtener un valor aproximado de $\sqrt[3]{122}$ por medio de diferenciales

III.175 Calcular un valor aproximado de $cos\ 32°$ empleando diferenciales

III.176 Obtener un valor aproximado del incremento del área de una esfera si su radio cambia de $r_1 = 1.20\ m$ a $r_2 = 1.22\ m$

III.177 Calcular aproximadamente el incremento del volumen de una esfera cuando su radio cambia de $r_1 = 80\ cm$ a $r_2 = 77\ cm$.

III.178 El radio de la base de un cono mide $30\ cm$ y la altura del cono cambia de $h_1 = 85\ cm$ a $h_2 = 89\ cm$; empleando diferenciales, calcular un valor aproximado del incremento de su volumen.

III.179 Empleando diferenciales calcular aproximadamente el incremento del área total de un cilindro circular recto cuando:

a) El radio $r_1 = 1.00\ m$ de la base permanece constante y la altura $h_1 = 2.50\ m$ se incrementa en $\Delta h = 2.5\ cm$.

b) La altura $h_1 = 2.50\ m$ permanece constante y el radio de la base cambia de $r_1 = 1.00\ m$ a $r_2 = 98\ cm$.

III.180 Dada $y = x^2 + 1$ obtener Δy , dy y $\Delta y - dy$ para $x_1 = 3$ y $\Delta x = 0.02$

III.181 Si $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x_1 = 2$, $\Delta x = 0.01$, calcular dy y $\Delta y - dy$.

III.182 Calcular el error absoluto y el error relativo que se comete si se emplea la diferencial dy en lugar del incremento Δy cuando $y = x^2 + 4x - 5$, $x_1 = 1$, $\Delta x = 0.3$.

III.183 Calcular el error relativo y el error en porcentaje que se cometería si se toma la diferencial dy en lugar del incremento Δy siendo $y = x^3 - 2x^2 + 3$, $x_1 = 2$, $\Delta x = 0.05$.

VARIACIÓN DE FUNCIONES



EJERCICIOS RESUELTOS

IV.1 Investigar si el Teorema de Rolle es aplicable a la función

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 4$$

en el intervalo $[0, 2]$, en caso afirmativo determinar el valor de x en donde se verifica.

SOLUCIÓN:

a) La función es continua en el intervalo $[0, 2]$ por ser entera.

b) La función es derivable $(0, 2)$ por ser entera.

c) $f(a) = f(0) = 4$, $f(b) = f(2) = \frac{2^2}{2} - 2 + 4 = 4$,. Luego $f(a) = f(b)$.

El Teorema sí es aplicable.

$f'(x) = x - 1$

$f'(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

El Teorema se verifica en $x_1 = 1 \in (0, 2)$

IV.2 Dada la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ investigar si es aplicable el Teorema de Rolle en el intervalo $[-4, 4]$. En caso afirmativo determinar el valor de x en donde se verifica el Teorema.

SOLUCIÓN:

a) La función es continua en el intervalo $[-4, 4]$ por ser irracional con dominio $[-5, 5]$.

b) La función es derivable en el intervalo $(-4\,,\,4)$, ya que $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}}$

c) $f(a) = f(-4) = -\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = -3$

$f(b) = f(4) = -\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = -3$

$f(a) = f(b)$

se cumplen las condiciones de la hipótesis del Teorema, luego es aplicable.

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} = x_1 = 0 \in (-4\,,\;4)$$

El Teorema se verifica en $x_1 = 0$

IV.3 Investigar si se satisfacen las condiciones del Teorema de Rolle en el intervalo $[-1\,,\;2]$ para la función

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

En caso afirmativo, obtener el valor o los valores de x donde se cumple el Teorema.

SOLUCIÓN:

Como la función es polinómica, es continua y derivable para todo valor de x, luego se satisfacen las dos primeras condiciones del Teorema de Rolle. Específicamente, la función es continua en el intervalo $[-1\,,\;2]$ para la tercera condición

$f(a) = f(-1) = -1-2+1+2 = 0$

$f(b) = f(2) = 8-8-2+2 = 0$

$f(-1) = f(2)$, por lo cual se cumple la tercera condición del Teorema, $f(a) = f(b)$.

Derivando, $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$

Haciendo $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 1 = 0$

Al resolver esta ecuación se obtiene,

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+12}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{7}}{3} \quad , \qquad x_2 = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$$

Ambos valores están en el intervalo abierto $(-1, \ 2)$, en los dos se cumple el Teorema de Rolle.

IV.4 Investigar si se cumplen las condiciones del Teorema de Rolle para la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & si \quad x < 1 \\ 2x - 3 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

en el intervalo $\left[-2, \frac{5}{2}\right]$. Si es así determinar el valor o los valores de x para los cuales se verifica el Teorema.

SOLUCIÓN:

a) Condición de continuidad. La única posibilidad de discontinuidad se presenta en $x_1 = 1$ $\quad f(1) = 2 - 3 = -1$,

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 2) = 1 - 2 = -1$;

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 3) = 2 - 3 = -1$;

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -1$, luego existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$,

entonces $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ y la función es continua en $x_1 = 1$ y es continua en el intervalo $\left[-2, \frac{5}{2}\right]$.

b) Condición de derivabilidad. También para $x_1 = 1$ se tiene la única posibilidad de que la función no sea derivable $f_-'(1) = 2(1) = 2$, $f_+'(1) = 2$; como $f_-'(1) = f_+'(1) = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$. La función es derivable en $x_1 = 1$ y el intervalo $\left(-2 , \frac{5}{2} \right)$.

c) Condición $f(a) = f(b)$; $f(a) = f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$;

$f(b) = f\left(\frac{5}{2} \right) = 5 - 3 = 2$; $f(-2) = f\left(\frac{5}{2} \right)$, se cumple también la tercera condición del Teorema.

Ahora, $f'(x) = 2x$ para $-2 < x < 1$

$f'(x) = 2$ si $1 \le x < \frac{5}{2}$

solamente en $-2 < x < 1$ se puede tener $f'(x_1) = 0$, para esto $2x = 0$, $x_1 = 0$, $x_1 \in \left(-2 , \frac{5}{2} \right)$.

El Teorema se verifica en $x_1 = 0$.

IV.5 Si el Teorema de Rolle es aplicable a la siguiente función en el intervalo $[0, 4]$, aplicarlo y determinar el o los puntos en que se verifica. Si no es aplicable, explicar las causas de esto.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x + 2}$$

SOLUCIÓN:

$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x + 2}$ es discontinua para $x_1 \neq -2$, luego es continua en el intervalo $[0, 4]$, se satisface la primera condición del Teorema de Rolle

Derivando se obtiene $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 8}{(x+2)^2}$, se ve que la función es derivable también para todo valor $x_1 \neq -2$ por lo cual es derivable en el intervalo $(0,\ 4)$ y se cumple la segunda condición del Teorema.

Finalmente, $f(a) = f(0) = \dfrac{0}{2} = 0$; $f(b) = f(4) = \dfrac{0}{6} = 0$

$f(0) = f(4)$, se cumple la tercera condición del Teorema, por lo cual si es aplicable.

$f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x^2 + 4x - 8 = 0$

Resolviendo esta ecuación se obtienen, $x_1 = -2 + 2\sqrt{3}$ y $x_2 = -2 - 2\sqrt{3}$.

El Teorema se verifica para $x_1 = -2 + 2\sqrt{3} = 2\left(\sqrt{3} - 1\right)$, $2\left(\sqrt{3} - 1\right) \in (0,\ 4)$

$x_2 = -2 - 2\sqrt{3} \notin (0,\ 4)$

IV.6 Investigar si es aplicable el Teorema de Rolle para la función

$$f(x) = 3 - (x-2)^{\frac{2}{3}}$$

en el intervalo $[-6,\ 10]$. En caso afirmativo determinar el o los valores de x donde se verifica, en caso negativo decir porqué no es aplicable.

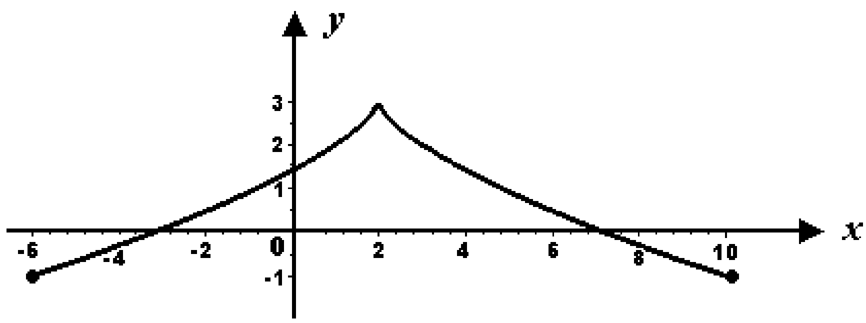
SOLUCIÓN:

La función es continua para todo valor de x, luego es continua en el intervalo $[-6,\ 10]$.

La derivada es $f'(x) = -\frac{2}{3}\left(x-2\right)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$

Se observa que para $x_1 = 2$ la derivada no existe y el valor 2 pertenece al intervalo $(-6, 10)$, entonces la función no es derivable en este intervalo por lo cual el Teorema de Rolle no es aplicable.

Observando la gráfica de la función se nota que en el punto $A(2, 3)$, no tiene tangente y que en ningún punto de ella la recta tangente es paralela al eje de las abscisas.



IV.7 La función $f(x) = tan\, x$ tiene valores iguales para $x_1 = 0$ y $x_2 = \pi$. ¿Es aplicable el Teorema de Rolle para esta función en el intervalo $\left[0, \pi\right]$?

SOLUCIÓN:

En efecto, $f(x) = tan\; 0 = 0$ y $f(\pi) = tan\, \pi = 0$, esto implica que se cumple la tercera condición de la hipótesis del Teorema de Rolle, sin embargo para $x_3 = \frac{\pi}{2}$ la función es discontinua, dado que $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ no existe, y como $\frac{\pi}{2} \in \left[0, \pi\right]$, $f(x) = tan\, x$ no es continua en el intervalo considerado, por lo cual no es aplicable el Teorema de Rolle.

IV.8 Investigar si el Teorema del Valor Medio de Cálculo Diferencial es aplicable a la función

$$f(x) = 2x^3 - 10x^2 - 6x + 7$$

en el intervalo $[1, 3]$, en caso afirmativo determinar el o los valores de x en donde se verifica.

SOLUCIÓN:

La función es continua en el intervalo $[1, 3]$ y es derivable en el intervalo $(1, 3)$ por ser entera, por lo cual el Teorema si es aplicable.

$$f'(x) = 6x^2 - 20x - 6$$

$$f(1) = 2 - 10 - 6 + 7 = -7$$

$$f(3) = 2(27) - 10(9) - 6(3) + 7 = -47$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-47 + 7}{3 - 1} = \frac{-40}{2} = -20$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) \Rightarrow 6x^2 - 20x - 6 = -20$$

$$6x^2 - 20x + 14 = 0$$

$$3x^2 - 10x + 7 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(3)7}}{2(3)} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{10 \pm 4}{6}$$

$$x_1 = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}; \qquad 1 < x_1 < 3$$

$$x_2 = \frac{6}{6} = 1 \notin (1, 3)$$

El teorema se verifica en $x_1 = \dfrac{7}{3}$

IV.9 Verificar que para la función $f(x) = \sqrt{x+2}$ en el intervalo $[-2, 2]$ se satisfacen las condiciones de la hipótesis del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial y determinar el valor x_1 donde se cumple la tesis del teorema.

SOLUCIÓN:

El dominio de esta función irracional es

$$D_f = \{ x \mid x \geq -2 \}$$

luego es continua en el intervalo $[-2, 2]$ y es derivable en el intervalo $(-2, 2)$ ya que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

El Teorema es aplicable.

Se tiene $f(a) = f(-2) = \sqrt{-2+2} = 0$

$$f(b) = f(2) = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{2-0}{2-(-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(x) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x_1+2}}$$

$$\sqrt{x_1+2} = 1, \quad x_1 + 2 = 1, \quad x_1 = -1 \in (-2, 2)$$

El Teorema se cumple en $x_1 = -1$

IV.10 Sabiendo que $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$ es continua y derivable para todo valor de x y considerando que el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial se cumple para $x_1 = 2$, determinar el valor de b si $a = 1$

SOLUCIÓN:

Se tiene, $f(a) = f(1) = 3 + 4 - 3 = 4$

$$f(b) = 3b^2 + 4b - 3 \text{ .... } (1)$$

$$f'(x_1) = 6x_1 + 4 = 6(2) + 4 = 16$$

Según la tesis del Teorema,

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad , \qquad a < x_1 < b$$

Luego , $f(b) = f(a) + (b - a)\, f'(x_1)$

$$f(b) = 4 + (b - 1)(16) = 4 + 16b - 16$$

$$f(b) = 16b - 12 \text{ .... } (2)$$

De (1) y de (2) , $3b^2 + 4b - 3 = 16b - 12$

$$3b^2 - 12b + 9 = 0$$

$$b^2 - 4b + 3 = 0$$

$$(b - 3)(b - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 3 \;\; y \;\; b_2 = 1$$

Evidentemente el valor pedido es $b_1 = 3$

IV.11 Empleando el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial, calcular en forma aproximada $\sqrt[6]{65}$

SOLUCIÓN:

Sea $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $f(65) = \sqrt[6]{65}$, como $2^6 = 64$, conviene tomar $a = 64$ y $b = 65$.

Por el Teorema, $f(b) = f(a) + (b - a)\, f'(x_1)$

Derivando la función propuesta, $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$;

$$f'(x) = \frac{1}{6} x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6\left(\sqrt[6]{x}\right)^5}$$

Tomando $x_1 = 64$ resulta

$$f'(x_1) = \frac{1}{6\left(\sqrt[6]{64}\right)^5} = \frac{1}{6(32)} = \frac{1}{192}$$

Considerando este valor en (1) , queda,

$$f(65) = \sqrt[6]{65} \cong \sqrt[6]{64} + \frac{1}{192} = 2 + \frac{1}{192} = 2.0052$$

El resultado es: $\sqrt[6]{65} \cong 2.0052$

IV.12 En un cuerpo prismático de $1.00\ m$ de altura se hizo una perforación cilíndrica de $10\ cm$ de diámetro. Empleando un taladro se agranda la perforación hasta tener un diámetro de $10.4\ cm$. Determinar la cantidad de material extraído.

a) Empleando el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial.

b) Por medio de incrementos

SOLUCIÓN:

Sea $x_1 = \frac{10}{2} = 5\ cm$ el radio inicial de la perforación y $x_2 = \frac{10.4}{2} = 5.2\ cm$ el radio final de la misma.

a) El volumen de la perforación es el del cilindro, $V = f(x) = \pi x^2 h$, para $h = 1.00\ m = 100\ cm$ $\quad f(x) = 100\pi x^2$ que es una función continua y derivable para todo valor de x.

Según el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial

$f(b) - f(a) = (b - a)\ f'(x_1)$ .... (1)

La cantidad de material extraído es $\Delta V = f(b) - f(a)$ como $f'(x) = 200\pi x$, tomando $x_1 = 5\ cm$ se obtiene por (1),

$\Delta V = (5.2 - 5)\ 200\ \pi(5) = 200\ \pi$

$\Delta V \cong 628.32\ cm^3$

b) Como $\Delta V = V_2 - V_1$ $\qquad \Delta V = 100\ \pi x^2$

$$\Delta V = 100\ \pi \left[(5.2)^2 - 5^2 \right] = 204\pi \quad \Delta V \cong 640.88\ cm^3$$

IV.13 Aplicando el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial, obtener una cota superior del error que se comete al considerar que $\sqrt[5]{34} \cong 2$

SOLUCIÓN:

Sea $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$ entonces, $f'(x) = \dfrac{1}{5\left(\sqrt[5]{x}\right)^4}$, $y = f(x)$ es una función continua y derivable para todo $x > 0$; aplicando el teorema indicado a esta función en el intervalo $[32, 34]$.

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(x_1) \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt[5]{34} - \sqrt[5]{32} = (34 - 32)\, \frac{1}{5\left(\sqrt[5]{x_1}\right)^4} \text{ .... } (1)$$

Si se toma $x_1 = 32$, $5\left(\sqrt[5]{x_1}\right)^4 = \left(\sqrt[5]{32}\right)^4 = 5(2)^4 = 80$

Sustituyendo este valor en (1) queda,

$$\sqrt[5]{34} - 2 = 2\,\frac{1}{80} = 0.025$$

Esto implica que el error que se comete es menor que 0.025, ya que el valor exacto de x_1 es mayor que 32 , lo cual hace que $f'(x_1)$ en realidad sea menor que $\frac{1}{80}$, $(b - a)\, f'(x_1)$ será menor que $\frac{1}{40} = 0.025$

IV.14 Obtener los valores máximos y mínimos relativos de la función

$$f(x) = 4x + \frac{1}{x}$$

SOLUCIÓN:

La primera derivada de la función es: $f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - \frac{1}{x^2} = 0 \; ; \qquad x^2 = \frac{1}{4}$$

$x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, que son los valores críticos.

La segunda derivada es:

$$f''(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

Para $x_1 = -\frac{1}{2}$;

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = -16 < 0$$

por lo cual $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -4$ es un máximo relativo.

Para $x_2 = \frac{1}{2}$,

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 16 > 0$$

Por lo cual $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 4$ es un mínimo relativo

IV.15 Determinar los máximos y mínimos relativos de la función

$$y = \sqrt[3]{(x-3)^2} - 5$$

SOLUCIÓN:

Derivando, $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(x-3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-3}}$

No hay valores de x que anulen a la derivada, pero $x_1 = 3$ la hace discontinua.

$x < 3 \Rightarrow \sqrt[3]{x-3} < 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} < 0$

$x > 3 \Rightarrow \sqrt[3]{x-3} < 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0$

Como la derivada cambia de signo de $(-)$ a $(+)$ al pasar x creciendo por $x_1 = 3$, se tiene un mínimo relativo para $x_1 = 3$ cuyo valor es,

$f(3) = \sqrt[3]{0} - 5 = -5$

IV.16 Para la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$, obtener

a) Los intervalos donde es creciente o decreciente.

b) Sus valores máximos y mínimos relativos.

c) La orientación de la concavidad y los puntos de inflexión de su gráfica.

d) Trazar su gráfica.

SOLUCIÓN:

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$

Valores críticos, $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 1$

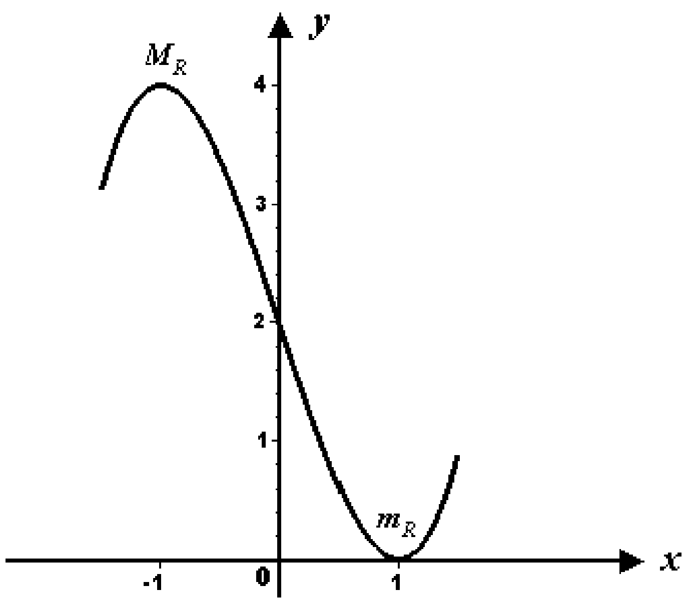
$f''(x) = 6x$; $f''(x) = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

x	$x+1$	$x-1$	$f'(x)$	$f''(x)$	$y = f''(x)$	Gráfica
$x < -1$	$-$	$-$	$+$	$-$	creciente	$\cap$
$x_1 = -1$	0		0	$-$	$M_R = 4$	$\cap$
$-1 < x < 0$	$+$	$-$	$-$	$-$	decreciente	$\cap$
$x_3 = 0$	$+$	$-$	$-$	0	decreciente	$I(0, 2)$
$0 < x < 1$	$+$	$-$	$-$	$+$	decreciente	$\cup$
$x_2 = 1$	$+$	0	0	$+$	$m_R = 0$	$\cup$
$x > 1$	$+$	$+$	$+$	$+$	creciente	$\cup$

Máximo relativo $M_R = f(-1) = 4$

Mínimo relativo, $m_R = f(1) = 0$

Punto de inflexión, $I(0, 2)$



IV.17 Dada la función $f(x) = 2 + 4x^3 - 3x^4$, determinar:

a) Los intervalos donde es creciente o decreciente.

b) Sus valores máximos y mínimos relativos.

c) Los puntos de inflexión y la orientación de la concavidad de su gráfica.

e) Trazar su gráfica.

SOLUCIÓN:

$f'(x) = 12x^2 - 12x^3 = 12x^2(1-x)$

Valores críticos, $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 1$

$f''(x) = 24x - 36x^2 = 12x(2-3x)$;

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_3 = \frac{2}{3}$

x	$f'(x)$	x	$2-3x$	$f''(x)$	$y = f(x)$	Gráfica
$x < 0$	+	−	+	−	creciente	$\cap$
$x_1 = 0$	0	0		0		$I(0, 2)$
$0 < x < \frac{2}{3}$	+	+	+	+	creciente	$\cup$
$x = \frac{2}{3}$	+	+	0	0	creciente	$I_2\left(\frac{2}{3}, \frac{70}{27}\right)$
$\frac{2}{3} < x < 1$	+	+	−	−	creciente	$\cap$
$x_2 = 1$	0	+	−	−	$M_R = 3$	$\cap$
$x > 1$	−	+	−	−	decreciente	$\cap$

$$f\,(\,0\,) = 2$$

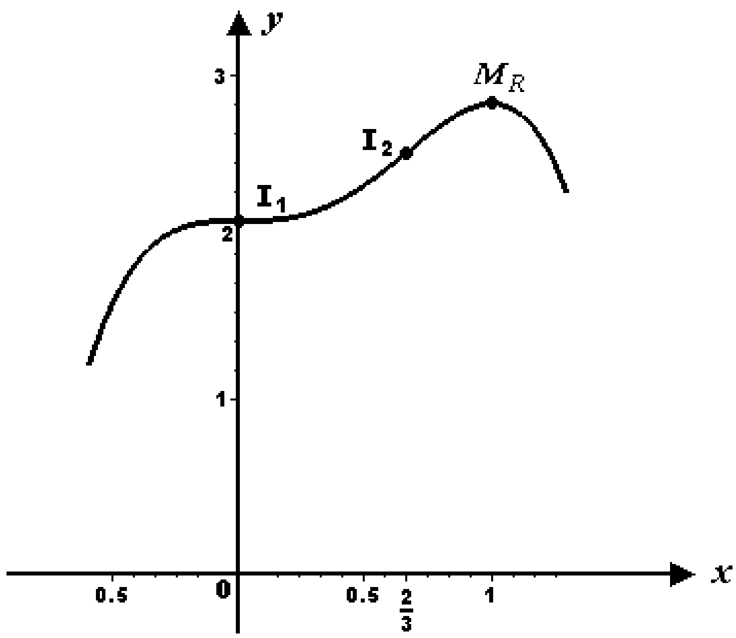
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 =$$

$$= 2 + \frac{32}{27} - \frac{16}{27} =$$

$$= \frac{70}{27} \doteq -\ 2.5926$$

$$f\,(\,1\,) = 2 + 4 - 3 = 3$$

Máximo relativo, $M_R = 3$



IV.18 Analizar la función

$$f\,(\,x\,) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 18x - 1$$

determinando:

a) Los intervalos donde es creciente o decreciente.

b) Sus valores máximos y mínimos relativos.

c) De su gráfica, la orientación de la concavidad y los puntos de inflexión.

f) Trazar su gráfica.

SOLUCIÓN:

$$f'(x) = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 18 = 6(x+1)(2x-1)(x-3)$$

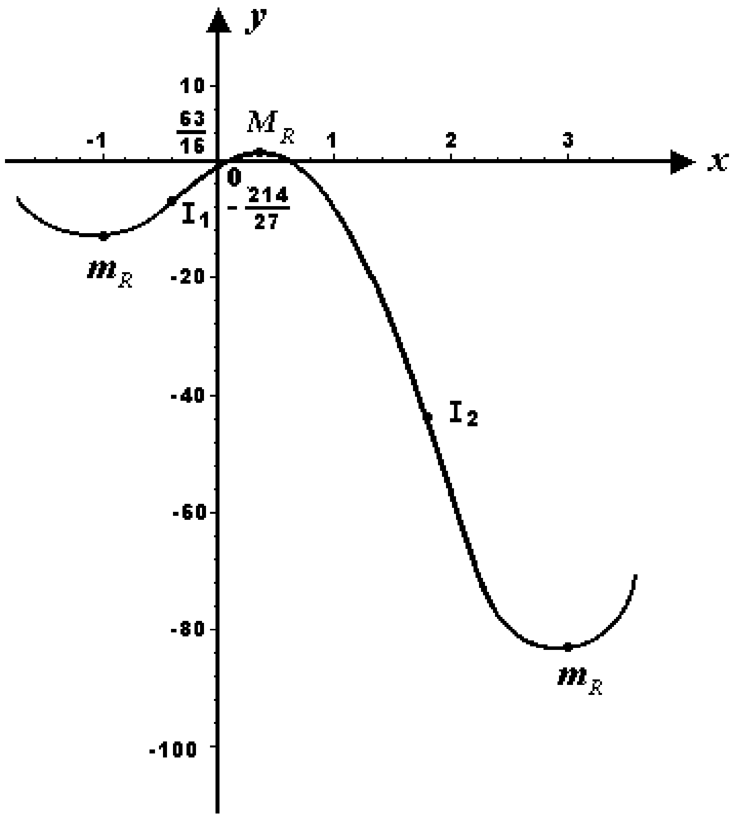
$$f''(x) = 6(6x^2 - 10x - 4) = 12(3x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \; ; \quad x_3 = \frac{1}{2} \; ; \quad x_5 = 3$$

$$f''(x) = \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3} \; ; \quad x_4 = 2$$

x	$f'(x)$	$f''(x)$	$f(x)$	Gráfica
$x < -1$	$-$	$+$	decreciente	$\cup$
$x_1 = -1$	0	$+$	$Min.\ f(-1) = -18$	$\cup$
$-1 < x < -\frac{1}{3}$	$+$	$+$	creciente	$\cup$
$x_2 = -\frac{1}{3}$	$+$	0	creciente	$I_2\left(-\frac{1}{3} - \frac{214}{27}\right)$
$-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$	$+$	$-$	creciente	$\cap$
$x_3 = \frac{1}{2}$	0	$-$	$Max.\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{63}{16}$	$\cap$
$x_3 = \frac{1}{2}$	$-$	$-$	decreciente	$\cap$
$x_4 = 2$	$-$	0	decreciente	$I_2(2, -45)$
$2 < x < 3$	$-$	$+$	decreciente	$\cup$
$x_5 = 3$	0	$+$	$Min.\ f(3) = -82$	$\cup$
$x > 3$	$+$	$+$	creciente	$\cup$

$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 18x - 1$



IV.19 Determinar los valores máximos y mínimos absolutos y relativos de la función

$$f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} - 3 \, , \qquad x \in [-1, 4]$$

SOLUCIÓN:

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{10}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{5x^{\frac{2}{3}}}{3} = \frac{10-5x}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{5(2-x)}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

valores críticos

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2 - x = 0 \, , \qquad x_1 = 2$

donde f' no está definida $\qquad x_2 = 0$

$-1 < x < 0 \;\Rightarrow\; f'(x) < 0 \,, \quad y = f(x)$ es decreciente

$0 < x < 2 \;\Rightarrow\; f'(x) > 0 \,, \quad y = f(x)$ es creciente

$2 < x < 4 \;\Rightarrow\; f'(x) < 0 \,, \quad y = f(x)$ es decreciente

$$f(-1) = 5(+1) - (-1) - 3 = 3$$

$$f(0) = -3$$

$$f(2) = 5(2)^{\frac{5}{3}} - 2^{\frac{2}{3}} - 3 = 3\left(2^{\frac{2}{3}} - 1\right) ;$$

$$f(2) \doteq 3(1.58740-1) = 1.76220$$

$$f(4) = 5(4)^{\frac{2}{3}} - 4^{\frac{5}{3}} - 3 = 4^{\frac{2}{3}}(5-4) - 3 = 4^{\frac{2}{3}} - 3$$

$$f(4) \doteq 2.51984 - 3 = -0.48016$$

se deduce que

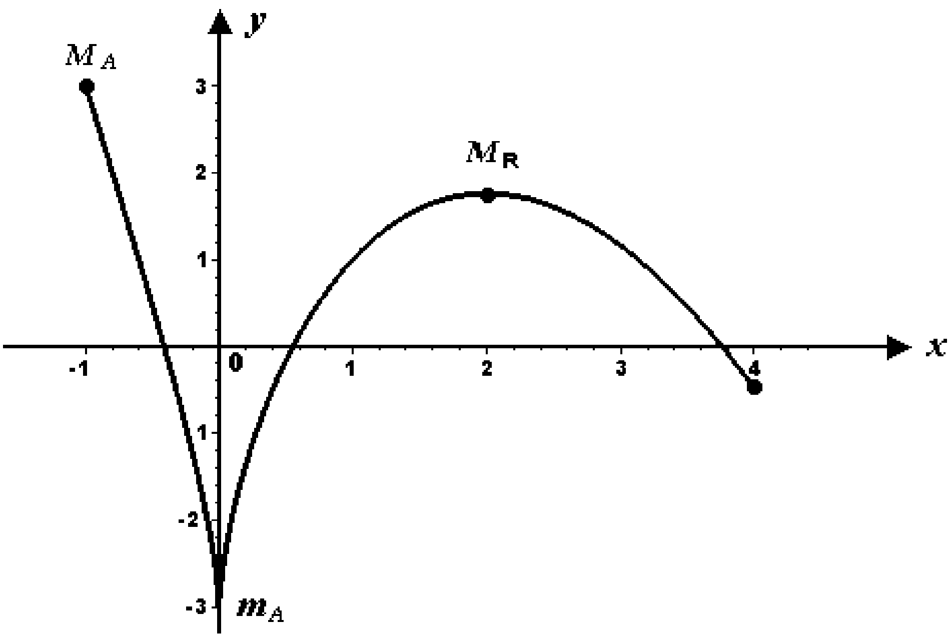
El máximo absoluto es

$$M_A = f(-1) = 3$$

El mínimo absoluto es

$$m_A = f(0) = -3$$

$f(2) \doteq 1.76220 = M_R$ es máximo relativo.



IV.20 La suma de un número positivo $"z"$ más el doble de otro número positivo $"x"$ debe ser 16, determinar dichos números de tal forma que su producto sea el mayor posible.

SOLUCIÓN:

$$z + 2x = 16 \ , \quad \text{luego} \quad z = 16 - 2x$$

Producto: $P = zx$

El producto en términos de x es

$$P(x) = (16 - 2x)x$$

$$P(x) = 16x - 2x^2$$

$P'(x) = 16 - 4x$

$P'(x) = 0 \ \Rightarrow \ 16 - 4x = 0 \ , \quad x_1 = 4$

$x < 4 \ \Rightarrow \ P'(x) > 0$

$x > 4 \ \Rightarrow \ P'(x) < 0$

Luego $P(x)$ es máximo para $x_1 = 4 \quad z_1 = 16 - 2(4) = 8$

Los números pedidos son: $z_1 = 8 \ , \quad x_1 = 4$

IV.21 La suma de tres números positivos es 30 y la suma del primero más el doble del segundo más el triple del tercero es 60, determinar estos números de modo que su producto de los tres sea el mayor posible.

SOLUCIÓN:

sean: $x \ , \ y \ , \ z$ los números

Se debe tener $x + y + z = 30$ .... (1)

Por otra parte $x + 2y + 3z = 60$ .... (2)

El producto de los tres números es, $P = xyz$ .... (3)

Multiplicando en (1) por -2 , Sumando con (2) miembro a miembro

$$\begin{array}{r} -2x-2y-2z=-60 \\ x+2y+3z=\ \ 60 \\ \hline -x\qquad +z=\ \ \ 0 \end{array}$$

Luego $z=x$ ....(4)

Multiplicando en (1) por -3 ,

$$\begin{array}{r} -3x-3y-3z=-90 \\ x+2y+3z=\ \ 60 \\ \hline -2x-y\qquad =-30 \end{array}$$

Por lo cual $y=-2x+30$ ....(5)

Sustituyendo (4) y (5) en (3)

$P=x(-2x+30)x$, queda $P(x)=-2x^3+30x^2$, $D_p=(0,\infty)$

Derivando, $P'(x)=-6x^2+60x$, $P''(x)=-12x+60$

Si $P'(x)=0 \Rightarrow 6x(-x+10)=0$, $x_1=10$, $x_2=0\notin D_p$

Para el valor crítico $x_1=10$, $f''(10)<0$, entonces $P(10)$ es máximo.

$x_1=10 \Rightarrow y_1=-2(10)+30=10$

$\Rightarrow z_1=10$

Los números pedidos son $x=10$, $y=10$, $z=10$

IV.22 Con 200 metros lineales de cerca se va a circundar un terreno rectangular uno de cuyos lados es un muro ya construido ¿ De qué dimensiones debe ser el terreno para que su área sea máxima? Calcular el área máxima.

SOLUCIÓN:

Sea $"y"$ el área del terreno $y = xz$ pero $z = 200 - 2x$ entonces

$y = x(200 - 2x)$; $y = 200x - 2x^2$

El dominio de esta función es $D_y = (0, 100)$ $\frac{dy}{dx} = 200 - 4x$;

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 200 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 50$ es el valor crítico.

$x < 50 \Rightarrow \frac{dy}{dx} < 0$

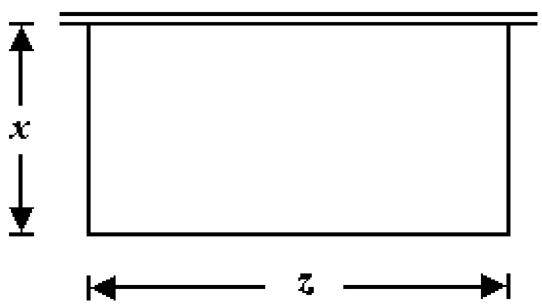
$x > 50 \Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0$

Para $x_1 = 50$, el área y_1 es máxima $z_1 = 200 - 2x_1 = 100\,m$;

$y_1 = 50(100) = 5000\,m^2$

Respuesta: $x = 50\,m$ $z = 100\,m$

Área máxima, $y = 5000\,m^2$



IV.23 A partir de una lámina cuadrada de $60\ cm$ por lado se va a fabricar una caja en forma de prisma recto sin tapa cortando cuadrados de lado $"x"$ en las esquinas y doblando las cejas resultantes hacia arriba. Determinar la capacidad máxima de la caja y el valor correspondiente de $"x"$.

SOLUCIÓN:

Capacidad, $V = y^2 x$

De la figura, $y = 60 - 2x$, luego $V(x) = (60 - 2x)^2 x$

cuyo dominio es $D_v = (0\,,\ 30)$

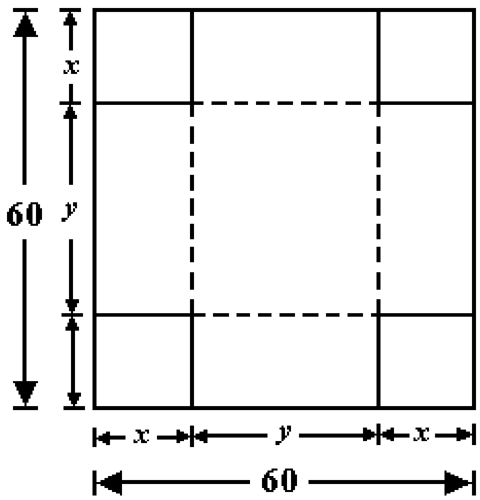
$V'(x) = 12(x - 10)(x - 30)$

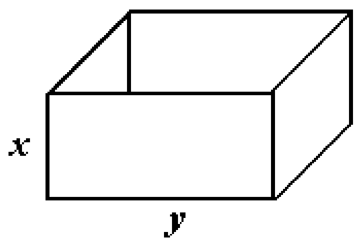
Haciendo $V'(x) = 0$ se tienen los valores críticos $x_1 = 10 \in D_v$ $x_2 = 30 \notin D_v$

$V''(x) = 12(2x - 40)$ $V''(x_1) = V''(10) = 12(-20) < 0$ luego $V(x_1) = V(10)$ es el valor máximo de la capacidad.

$V(10) = \left[\,60 - 2(10)\,\right]^2 10 = (60 - 20)^2\, 10 = (40)^2\,(10) = 16000\ cm^3$

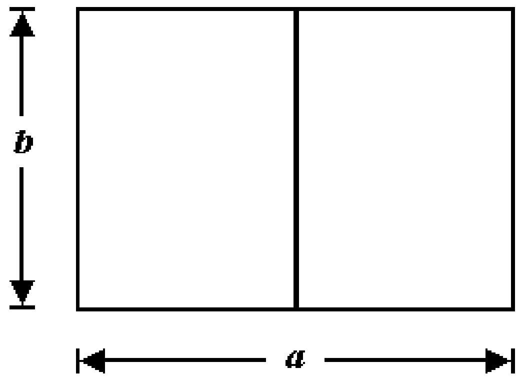
Respuesta: $V_{\max} = 16\ dm^3$ $x = 10\ cm$





IV.24 Se desea circundar con una cerca un terreno rectangular de área fija y después dividir el terreno en dos lotes con una cerca paralela a uno de los lados. Hallar la razón en que deben estar las longitudes de los lados del terreno para que la longitud total de la cerca sea mínima.

SOLUCIÓN:



Área, $A = ab$

Longitud de la cerca

$$l = 2a + 3b$$

Si $b = ax \Rightarrow x = \frac{b}{a}$,

$$A = a\,ax = a^2 x \quad \therefore \quad a = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{x}}$$

Entonces,

$$l(x) = 2\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{Ax} = \frac{2\sqrt{A} + 3\sqrt{A}\,x}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx}l(x) = \frac{\sqrt{x}\;3\sqrt{A} - \left(2\sqrt{A} + 3\sqrt{A}\,x\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{2x3\sqrt{A} - 2\sqrt{A} - 3\sqrt{A}\,x}{2x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{A}\,(6x - 2 - 3x)}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{A}\,(3x - 2)}{2x\sqrt{x}}$$

Si $\frac{d}{dx}l(x) = 0 \Rightarrow 3x - 2 = 0$, $x_1 = \frac{2}{3}$

Si $x < x_1$, $\frac{d}{dx}l(x) < 0$ si $x > x_1$, $\frac{d}{dx}l(x) > 0$, luego

$l(x)$ es mínima para $x_1 = \frac{2}{3}$ $b = \frac{2}{3}a$, o bien $a = \frac{3}{2}b$

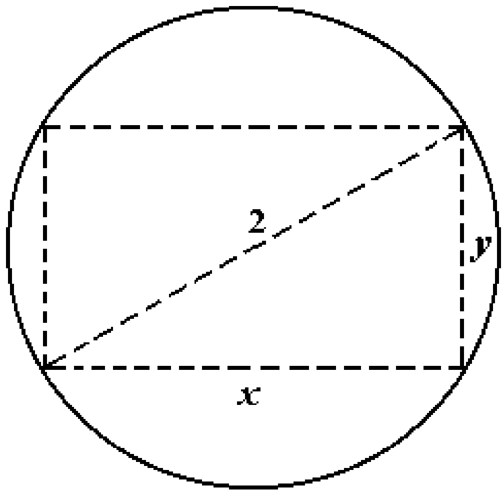
IV.25 Determinar las dimensiones del rectángulo de máxima área que puede inscribirse en un círculo de radio $1.00\ m$.

SOLUCIÓN:

El diámetro del círculo es igual a la diagonal del rectángulo y mide $2.00\ m$

El área del rectángulo es:

$$z = x\,y$$



Pero

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{4 - x^2}$$

entonces:

$$z = x\sqrt{4 - x^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = x\,\frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} + \sqrt{4 - x^2} = \frac{-x^2 + 4 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Si $\frac{dz}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; 4 - 2x^2 = 0$, $\qquad x^2 = 2$, $x_1 = \sqrt{2}$

Si $x < x_1 = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} > 0$, si $x > x_1 = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} < 0$,

para $x_1 = \sqrt{2}$, z_1 es máxima.

$$y_1 = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$$

Se trata de un cuadrado de lado $\qquad x_1 = \sqrt{2} \doteq 1.4142\ m$

IV.26 Un tanque en forma de prisma de base cuadrada con tapa se va a construir con placa metálica. La placa para el fondo y la tapa cuesta $\$\,30.00$ por m^2 y para las paredes laterales cuesta $\$\,20.00$ por m^2. La capacidad del tanque debe ser de $1{,}000$ litros, dimensionarlo para que su costo sea mínimo.

SOLUCIÓN:

Costo: $y = 2x^2(30) + 4xh(20)$

$y = 60x^2 + 80xh$

Capacidad: $V = x^2 h = 1\,m^3$, luego $h = \dfrac{1}{x^2}$ sustituyendo en el costo,

$$y = 60x^2 + \frac{80x}{x^2}$$

$$y = f(x) = 60x^2 + \frac{80}{x}$$

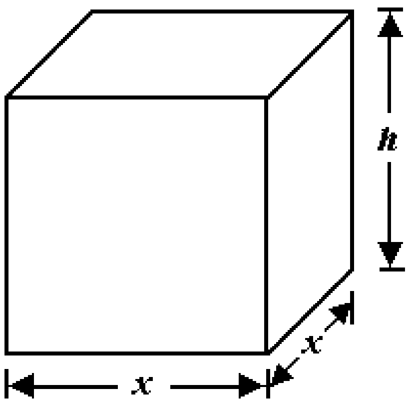
$$f'(x) = 120x - \frac{80}{x^2} = \frac{120x^3 - 80}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 120x^3 - 80 = 0\,,\quad 3x^3 = 2\,,\quad x^3 = \frac{2}{3}\,,\quad x_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

Si $x < x_1 \Rightarrow f'(x) < 0$ si $x > x_1 \Rightarrow f'(x) > 0$

para $x_1 = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$, $f(x_1)$ es mínimo. $h_1 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}} = \sqrt[3]{2.25}$

Dimensiones pedidas: $x_1 = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} \doteq 0.8733\ m$ $\quad h_1 = \sqrt[3]{2.25} \doteq 1.3112\ m$

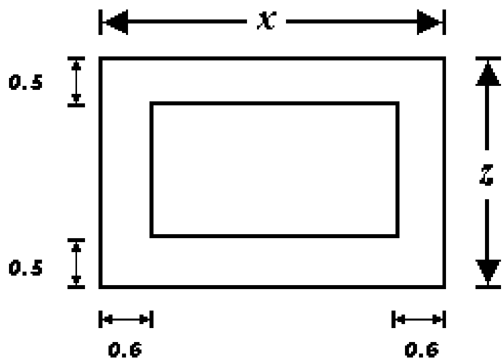


IV.27 Un anuncio luminoso de forma rectangular debe tener $36\ m^2$ de área. En los cuatro lados tendrá franjas no iluminadas de $50\ cm$ de ancho en los lados horizontales y de $60\ cm$ de ancho en los verticales. Proponer las dimensiones para que el rectángulo iluminado resulte de la mayor área posible.

SOLUCIÓN:

El área total es

$$xz = 36 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{36}{x} \ ; \quad x > 0$$



El área del rectángulo iluminado es

$$f(x) = (x - 1.20)\left(\frac{36}{x} - 1\right)$$

Derivando se obtiene

$$f'(x) = (x - 1.20)\left(-\frac{36}{x^2}\right) + \frac{36}{x} - 1$$

$$= -\frac{36}{x} + \frac{1.2\,(36)}{100\,x^2} + \frac{36}{x} - 1$$

$$f'(x) = \frac{43.20}{x^2} - 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{43.20}{x^2} = 1 \ , \qquad x^2 = 43.20 \ , \qquad x_1 = \sqrt{43.20}$$

La segunda derivada de la función es :

$$f''(x) = -\frac{(43.20)\,2x}{x^4} = -\frac{86.40}{x^3} < 0 \qquad \forall\ x > 0$$

Luego para el valor critico $x_1 = \sqrt{43.20}$ el área $f(x)$ es máxima.

Para $\quad x_1 = \sqrt{43.20}\ , \quad z_1 = \dfrac{36}{\sqrt{43.20}}$

Las dimensiones pedidas son , aproximado el valor de la raíz cuadrada.

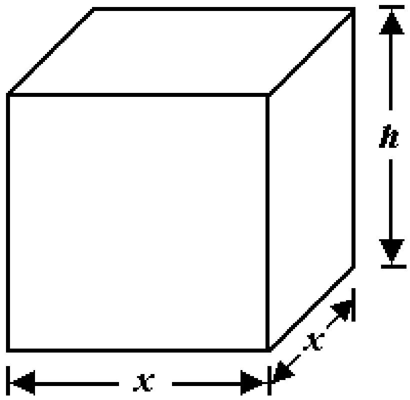
$$x \doteq 6.57\ m \ , \quad z = 5.48\ m$$

IV.28 Se construirá un tanque de forma prismática de base cuadrada con tapa, soldando placas de acero que deben totalizar $20\ m^2$. Dimensionar el tanque de tal manera que el cordón de soldadura necesario, sea de la menor longitud posible.

SOLUCIÓN:

Longitud de soldadura:

$$y = 8x + 4h$$



Área de las placas:

$$2x^2 + 4xh = 20\ m^2$$

Despejando h:

$$h = \frac{10 - x^2}{2x}$$; luego:

$$y = f(x) = 8x + 4\,\frac{10 - x^2}{2x} = \frac{8x^2 + 20 - 2x^2}{x}$$

$$f(x) = \frac{6x^2 + 20}{x}$$; el dominio de esta función es, $D_f = \left(0,\ \sqrt{20}\right)$

$$f'(x) = \frac{x(12x) - (6x^2 + 20)}{x^2} = \frac{12x^2 - 6x^2 - 20}{x^2} = \frac{6x^2 - 20}{x^2}$$

$$f'(x) \Rightarrow 6x^2 - 20 = 0 ;\quad 3x^2 = 10 ;\quad x^2 = \frac{10}{3} ;\quad x_1 = \sqrt{\frac{10}{3}} \in D_f$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{10}{3}} \notin D_f$$

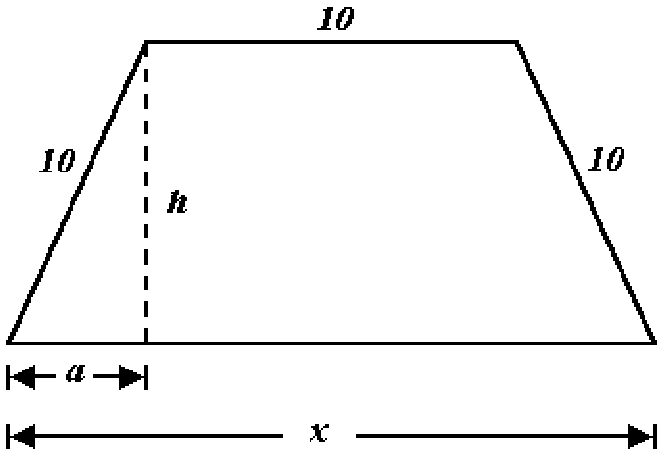
Sí $x < x_1 = \sqrt{\frac{10}{3}} \Rightarrow f'(x) < 0$; si $x > x_1 = \sqrt{\frac{10}{3}} \Rightarrow f'(x) > 0$;

Entonces $f'(x)$ es un mínimo $h_1 = \dfrac{10 - \frac{10}{3}}{2\,\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}} = \dfrac{20\sqrt{3}}{2(3)\sqrt{10}} = \sqrt{\dfrac{10}{3}} = x_1$

El tanque debe tener la forma de un cubo cuya arista es: $x_1 = \sqrt{\frac{10}{3}} \doteq 1.8257\ m$

IV.29 Tres lados de un trapecio miden $10\ cm$ cada uno. ¿De qué longitud debe ser el cuarto lado para que el área del trapecio sea máxima?

SOLUCIÓN:



Área $\quad A = \dfrac{x+10}{2}\, h$

$a = \dfrac{x-10}{2}$

$h^2 = (10)^2 - a^2 = 100 - \left(\dfrac{x-10}{2}\right)^2$

$h^2 = \dfrac{300+20x-x^2}{4}$

$h = \dfrac{1}{2}\sqrt{300+20x-x^2}$

Sustituyendo este valor en el área

$$A = \frac{x+10}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{300+20x-x^2} = \frac{1}{4}\,(x+10)\sqrt{300+20x-x^2}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{4}\,(x+10)\,\frac{20-2x}{2\sqrt{300+20x-x^2}} + \frac{1}{4}\sqrt{300+20x-x^2}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{(x+10)(10-x)+300+20x-x^2}{4\sqrt{300+20x-x^2}} = \frac{100-x^2+300+20x-x^2}{4\sqrt{300+20x-x^2}}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2+400+20x}{4\sqrt{300+20x-x^2}} = \frac{-x^2+200+10x}{2\sqrt{300+20x-x^2}}$$

$\dfrac{dA}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 10x - 200 = 0$; $\quad x > x_1 = 20 \;\Rightarrow\; \dfrac{dA}{dx} < 0$, luego A es máxima para $x_1 = 20\ cm$

Si $\quad 300 + 20x - x^2 = 0$

Para esta ecuación $x_2 = -10$ y $x_3 = 30$, para los cuales $"A"$ no puede ser máxima.

IV.30 En la construcción de un tanque cilíndrico sin tapa con lámina de acero, se deben emplear $600\ cm$ de cordón de soldadura. Determinar el radio y la altura del tanque que hagan que su capacidad sea máxima.

SOLUCIÓN:

Capacidad: $V = \pi r^2 h$;

soldadura: $2\pi r + h = 600$; $h = 600 - 2\pi r$

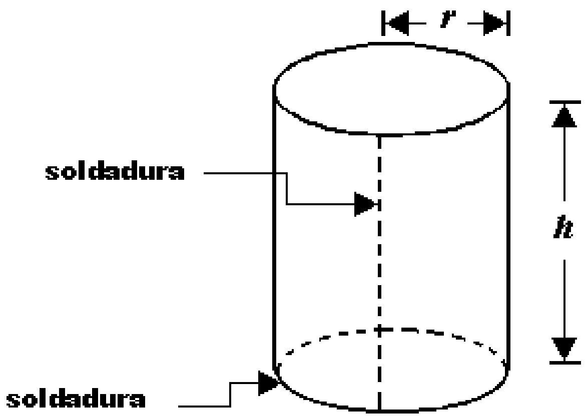
Luego: $V = \pi r^2 (600 - 2\pi r) \quad \Rightarrow \quad V' = 6\pi r \left[200 - \pi r \right]$

Si $\frac{dv}{dr} = 0 \Rightarrow 200 - \pi r = 0$; $r_1 = \frac{200}{\pi} \doteq 63.662\ cm$

$r < r_1 \Rightarrow \frac{dv}{dr} > 0$; $r > r_1 \Rightarrow \frac{dv}{dr} < 0$, luego $r_1 = \frac{200}{\pi}$ hace que V sea máxima.

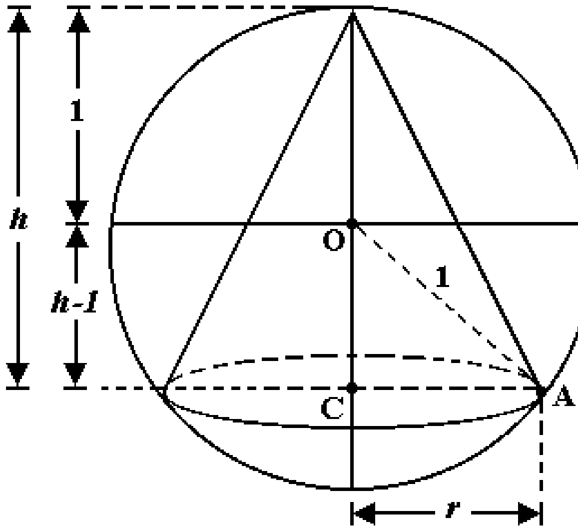
$h_1 = 600 - 2\pi \frac{200}{\pi} = 200\ cm$

Respuesta: $r_1 = \frac{200}{\pi} \doteq 63.662\ cm$, $h_1 = 200\ cm$



IV.31 En una esfera de $1\,m$ de radio está inscrito un cono de radio y altura variables. Determinar las dimensiones del cono de modo que su volumen sea el mayor posible.

SOLUCIÓN:



Volumen del cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

En el triángulo OCA

$$r^2 = 1 - (h-1)^2 = 2h - h^2$$

Sustituyendo r^2 en V

$$V = \frac{\pi}{3}\left(2h - h^2\right)h = \frac{\pi}{3}\left(2h^2 - h^3\right)$$

El dominio de V es $D_v = (0,\ 2)$

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}\left(4h - 3h^2\right)$$

$$\frac{dV}{dh} = 0 \;\Rightarrow\; 4h - 3h^2 = 0\,;\quad h(4-3h) = 0\,,\quad h_1 = \frac{4}{3}\,;\quad h_2 = 0 \notin D_v$$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = \frac{\pi}{3}(4-6h) = \frac{2\pi}{3}(2-3h)\,;\quad \text{para}\quad h_1 = \frac{4}{3}\,,\quad \frac{d^2v}{dh^2} = -\frac{4\pi}{3} < 0$$

Luego V es máximo para $h_1 = \frac{4}{3}$

$$r_1 = \sqrt{2h_1 - h_1^2} = \sqrt{2\,\frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{3} - \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{24-16}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

Las dimensiones del cono de volumen máximo son:

$$r_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \doteq 0.9428\,m\,,\quad h_1 = \frac{4}{3} \doteq 1.3333\,m$$

IV.32 Se va a instalar una línea telefónica siguiendo la trayectoria ACD de la figura. Los puntos B, C y D están sobre un camino recto, el tramo $\overline{AC}$ es a campo traviesa. El costo de la línea en el tramo $\overline{CD}$ es de $\$\,9{,}000.00\ Km$ y en el tramo $\overline{AC}$ es de $\$\,15{,}000.00$ por Km. Determinar la distancia del punto C al punto D para que el costo total de la línea sea el menor posible.

SOLUCIÓN:

$$\overline{AC} = \sqrt{x^2+9} \quad , \qquad \overline{CD} = 4-x$$

Costo total: $C = 15000\sqrt{x^2+9} + 9000\,(4-x)\ ; \quad D_c = (0\ ,\ 4)$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{15000\,x}{\sqrt{x^2+9}} - 9000 = \frac{15000\,x - 9000\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\frac{dC}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 15000\,x = 9000\sqrt{x^2+9}$$

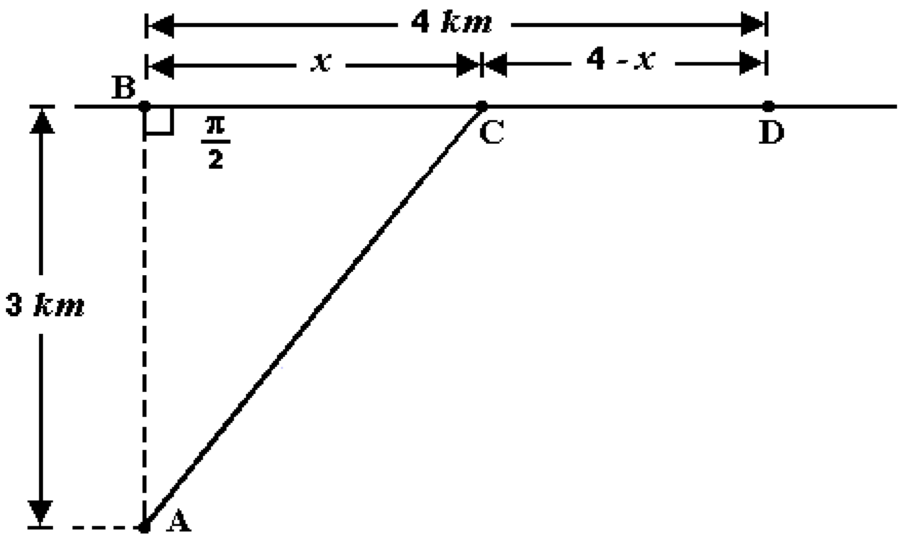
$$\frac{15}{9}x = \sqrt{x^2+9} \ ; \qquad \left(\frac{5}{3}\right)^2 x^2 = x^2+9 \ ; \qquad \frac{25}{9}x^2 - x^2 = 9$$

$$\frac{25-9}{9}x^2 = 9 \quad 16x^2 = 81\ ; \quad x^2 = \frac{81}{16}\ ; \quad x_1 = \frac{9}{4} = 2.25\ km\ ; \quad x_2 = -\frac{9}{4} \notin D_c$$

Si $x < x_1 = 2.25\ ,\ \dfrac{dC}{dx} < 0$ si $x > x_1 = 2.25\ ,\ \dfrac{dC}{dx} > 0$

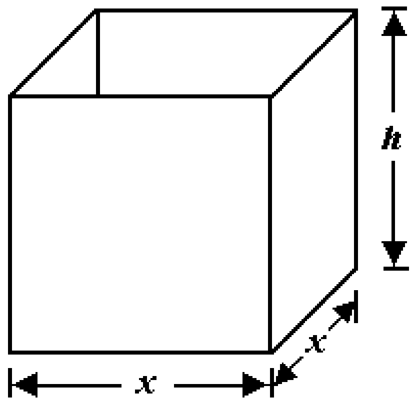
El costo C es mínimo cuando $x_1 = 2.25\ Km\ ; \quad \overline{CD} = 4 - 2.25 = 1.75\ km$

El Resultado: $\overline{CD} = 1.75\ km$



IV.33 Se va a fabricar un tanque prismático de base cuadrada sin tapa, soldando placas de acero cuya área total será de $10\ m^2$. Obtener las dimensiones del tanque para que su capacidad sea máxima.

SOLUCIÓN:



Capacidad: $V = x^2 h$;

Área de la placa: $4xh + x^2 = 10$

Despejando h :

$$h = \frac{10 - x^2}{4x}$$

Luego $V = x^2 \frac{10 - x^2}{4x}$; $V = \frac{x}{4}\left(10 - x^2\right)$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{x}{4}(-2x) + \frac{10 - x^2}{4} = \frac{1}{4}\left(-2x^2 + 10 - x^2\right); \quad \frac{dV}{dx} = \frac{1}{4}\left(-3x^2 + 10\right)$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 = 10, \quad x_1 = \sqrt{\frac{10}{3}} \doteq 1.8257\ m$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{3}{4}(2x) = -\frac{3}{2}x$$

Para $x_1 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$, entonces la capacidad $"V"$ es máxima

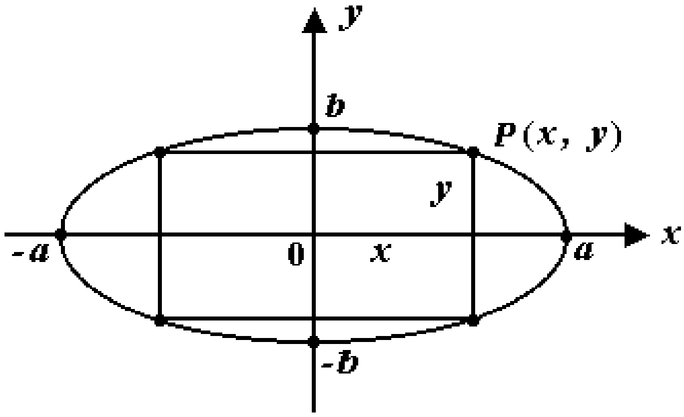
para $x_1 = \sqrt{\frac{10}{3}}$

$$h_1 = \frac{10 - \frac{10}{3}}{4\sqrt{\frac{10}{3}}} = \sqrt{\frac{5}{6}} \doteq 0.9129$$

Dimensiones pedidas: $x_1 = \sqrt{\frac{10}{3}} \doteq 1.8257\ m$; $h_1 = \sqrt{\frac{5}{6}} \doteq 0.9129\ m$

IV.34 En un terreno en forma de elipse con eje mayor de $60\ m$ y eje menor de $40\ m$, se va a trazar una cancha rectangular que tenga la mayor área posible, obtener las dimensiones de la cancha.

SOLUCIÓN:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Área de la cancha: $z = 4xy$

$$z = \frac{4b}{a}\, x\sqrt{a^2 - x^2}$$

si $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{4b}{a}\left(x\dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a^2 - x^2} \right) = \dfrac{4b}{a}\left(\dfrac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right)$

$$\frac{dz}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; a^2 - 2x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{a^2}{2}\ ; \qquad x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

si $x < \dfrac{a}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \dfrac{dz}{dx} > 0$

si $x > \dfrac{a}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \dfrac{dz}{dx} < 0$

Luego hay un máximo de $"z"$ para $x_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$$x_1 = \frac{30}{\sqrt{2}} \doteq 21.21\ m\ ; \qquad y_1 = \frac{20}{30}\sqrt{900 - \frac{900}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{450} \doteq 14.14\ m$$

Las dimensiones de la cancha son:

Largo: $2x_1 \doteq 42.43\ m$

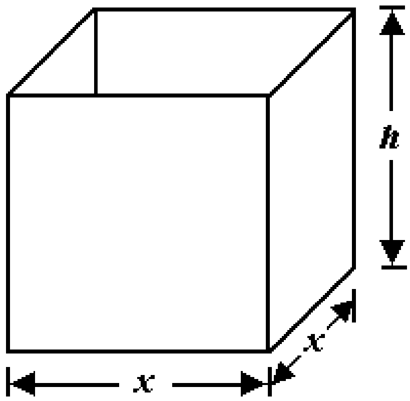
Ancho: $2y_1 \doteq 28.28\ m$

IV.35 Se va a construir un tanque prismático de base cuadrada sin tapa de 500 litros de capacidad, soldando placas de acero rectangulares y cuadradas. Determinar las dimensiones del tanque para que la longitud del cordón de soldadura sea la menor posible.

SOLUCIÓN:

Capacidad:

$$V = x^2 h = 0.50 \ m^3$$



Despejando la altura:

$$h = \frac{0.50}{x^2}$$

Longitud de la soldadura:

$$y = 4x + 4h$$

Sustituyendo h

$$y = 4x + 4\frac{0.50}{x^2} = 4x + \frac{2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 - \frac{2(2x)}{x^4} = \frac{4}{x^3} = \frac{4x^3 - 4}{x^3}$$

Si

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4 = 0, \quad x^3 = 1, \quad x_1 = \sqrt[3]{1}, \quad x_1 = 1$$

$x < x_1 = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} < 0$, $x > x_1 = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0$, así que se tiene un valor mínimo de $"y"$ para $x_1 = 1$

$$h_1 = \frac{0.50}{1} = 0.50 \ m$$

Dimensiones pedidas:

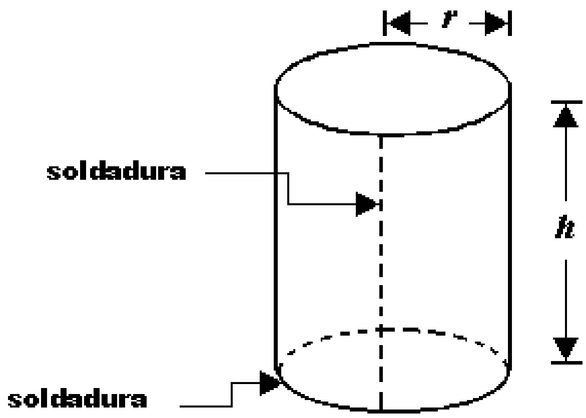
$$x_1 = 1 \ m, \qquad h_1 = 0.50 \ m$$

IV.36 Se va a fabricar un bote cilíndrico sin tapa de 8 litros de capacidad, a base de lámina de fierro unida con soldadura autógena. Dimensionar el bote de modo que el cordón de soldadura necesario sea de la menor longitud posible.

SOLUCIÓN:

La capacidad es:

$$V = \pi r^2 h = 8\ dm^3$$



Despejando la altura:

$$h = \frac{8}{\pi r^2}$$

La longitud de la soldadura es:

$$y = \pi 2r + h$$

Sustituyendo el valor de h:

$$y = 2\pi r + \frac{8}{\pi r^2}$$

$$\frac{dy}{dr} = 2\pi - \frac{8(2\pi r)}{\pi^2 r^4} = 2\pi - \frac{16}{\pi r^3} = \frac{2\pi^2 r^3 - 16}{\pi r^3}$$

$$\frac{d^2 y}{dr^2} = 0 + \frac{16\left(3\pi r^2\right)}{\pi^2 r^6} = \frac{48}{\pi r^4}$$

Si

$$\frac{dy}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi^2 r^3 - 16 = 0 \ ; \quad r^3 = \frac{8}{\pi^2} \quad ; \qquad r = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi^2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi^2}}$$

$$r_1 \doteq 0.9324\ dm = 9.324\ cm$$

$\forall \ r \in D_y$, $\quad \frac{d^2 y}{dr^2} > 0$ luego para r_1 hay un mínimo de $"y"$

$$h_1 = \frac{8}{\pi r^2} = \frac{8}{\pi\left(2^2 \pi^{-\frac{4}{3}}\right)} = 2\pi^{\frac{1}{3}} \doteq 2.9292\ dm \doteq 29.292\ cm$$

Las dimensiones pedidas son: $r_1 = 9.324\ cm$; $\quad h_1 = 29.292\ cm$

IV.37 En dos carreteras rectas perpendiculares entre sí, circula un camión en una y un automóvil en la otra. A las 0 horas el camión se encuentra en la intersección de las carreteras y el automóvil a $65\ km$ de la intersección. La velocidad del camión es de $40\ km/h$ y el automóvil circula a $65\ km/h$ acercándose a la intersección. ¿Cuándo será mínima la distancia entre los dos vehículos?

SOLUCIÓN:

Las ubicaciones del camión y el automóvil a las 0 horas son respectivamente C_1 , A_1 y C_2 , A_2 a las t horas.

En un tiempo t el camión ha recorrido $40t$ kilómetros y el automóvil $65-60t$ kilómetros.

La distancia y entre los dos vehículos esta dada por

$$y = \sqrt{(40t)^2 + (65-60t)^2}$$

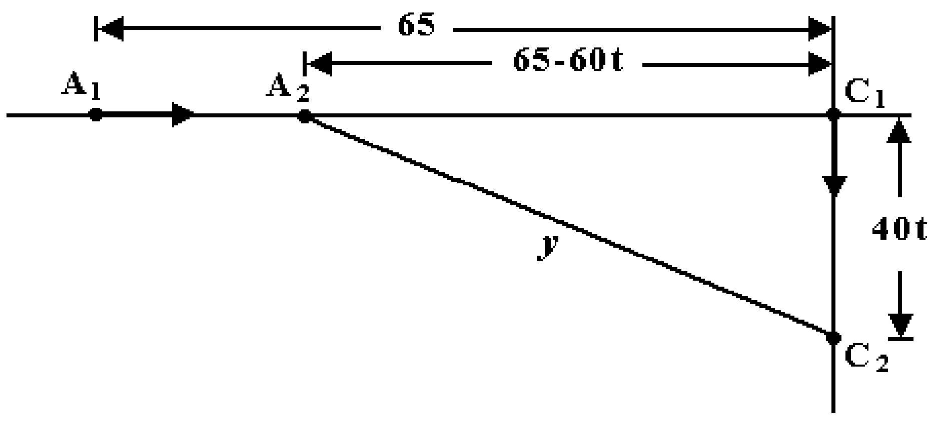
derivando $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{(40)^2 t + (65-60t)(-60)}{\sqrt{(40t)^2 + (65-60t)^2}}$

$$= \frac{1600t - 3900 + 3600t}{\sqrt{(40t)^2 + (65-60t)^2}} = \frac{5200t - 3900}{\sqrt{(40t)^2 + (65-60t)^2}}$$

$\dfrac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 5200t = 3900$, $t_1 = \dfrac{3900}{5200} = 0.75$, $t < 0.75 \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} < 0$

$t > 0.75 \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} > 0$ luego para $t_1 = 0.75$ horas y_1 es mínima.

Respuesta: $t_1 = 45$ minutos



IV.38 De una cartulina circular de radio r hay que hacer un vaso cónico recortando de la cartulina un sector circular AOB y uniendo los bordes OA y OB. Determinar el ángulo α para que la capacidad del vaso sea máxima.

SOLUCIÓN:

De la figura, sean $\overline{AC} = a$, $\overline{OC} = h$

Capacidad del vaso $V = \frac{\pi}{3} a^2 h$

En el triángulo AOB , $r^2 = a^2 + h^2 \quad \therefore \quad a^2 = r^2 - h^2$

Luego: $V = \frac{\pi}{3}\left(r^2 - h^2\right)h$; $V = \frac{\pi}{3}\left(r^2 h - h^3\right)$

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}\left(r^2 - 3h^2\right); \quad \text{si} \quad \frac{dV}{dh} = 0 \Rightarrow r^2 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h_1 = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

$$a^2 = r^2 - \frac{r^2}{3} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r$$

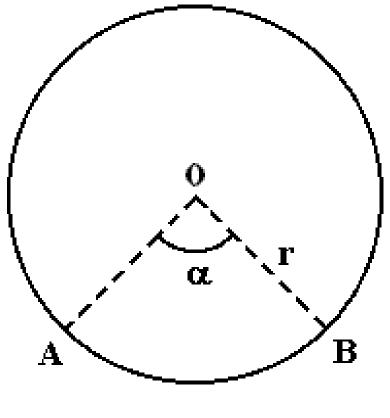
La longitud del borde del vaso es $2\pi a$. El ángulo subtendido por el arco de radio r y longitud $2\pi a$, es $2\pi - \alpha$, o bien $360° - \alpha$

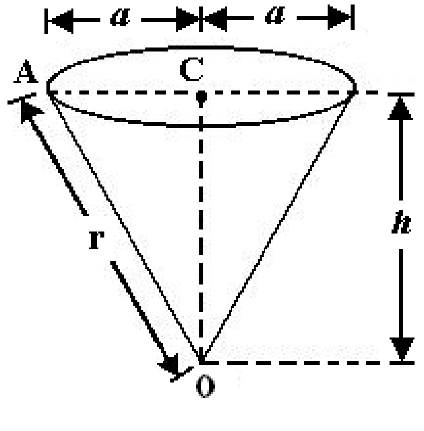
$$\frac{2\pi r}{360°} = \frac{2\pi a}{360° - \alpha} ; \quad 360° - \alpha = \frac{2\pi a}{2\pi} = \frac{a}{r}\, 360°$$

y como $a = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r$, queda $360° - \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\, 360°$

$$\alpha_1 = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) 360° \doteq (1 - 0.8165)\, 360° = 0.1835\,(360) = 66.06$$

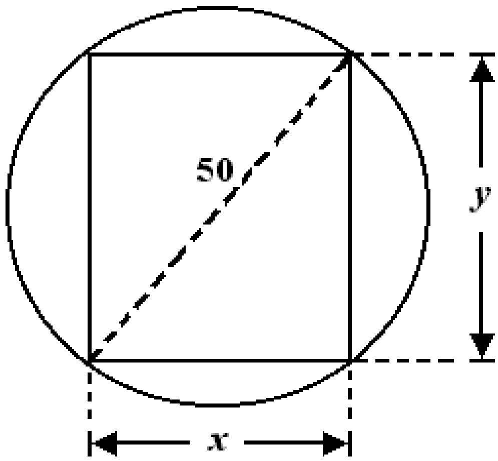
$$\alpha_1 \doteq 66°\ 03'\ 36''$$





IV.39 La resistencia a la flexión de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de la base de la sección por el cuadrado de su altura. Determinar las dimensiones de la sección de la viga de madera de máxima resistencia a la flexión que puede obtenerse de un tronco cilíndrico de $50\ cm$ de diámetro.

SOLUCIÓN:



Sea R la resistencia a la flexión y k la constante de proporcionalidad:

$R = kxy^2$ ....(1)

De la figura:

$x^2 + y^2 = (50)^2 \ ; \ y^2 = 2500 - x^2$

sustituyendo este valor en (1)

$R = kx\left(2500 - x^2\right); \ R = k\left(2500x - x^3\right); \quad D_r = (0,50)$

$$\frac{dR}{dx} = k\left(2500 - 3x^2\right)$$

Si

$$\frac{dR}{dx} = 0 \ \Rightarrow \ 2500 - 3x^2 = 0 \ , \quad 3x^2 = 2500 \quad x^2 = \frac{2500}{3} \ , \ x = \sqrt{\frac{2500}{3}}$$

Valor crítico: $x_1 = \dfrac{50}{\sqrt{3}} \ , \quad x_2 = -\dfrac{50}{\sqrt{3}} \notin D_R$

$\dfrac{d^2R}{dx^2} = k(-6x)$, para $x_1 = \dfrac{50}{\sqrt{3}} > 0$, $\dfrac{d^2R}{dx^2} < 0$, para el valor crítico x_1 , la resistencia R máxima

$$x_1 = \frac{50}{\sqrt{3}} \ \Rightarrow \ y_1 = \sqrt{2500 - x_1^2} = \sqrt{2500 - \frac{2500}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}2500} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ 50$$

Respuesta: $x_1 = 28.868\ cm \ , \ y_1 = 40.825\ cm$

IV.40 Una empresa que fabrica relojes, los vende a $\$200$ por pieza y puede producir a lo más $30,000$ piezas mensualmente. El costo total de producción de x piezas está dado por:

$$C(x) = 500,000 + 80x + 0.003x^2$$

Calcular la cantidad de piezas que deben venderse al mes para que las utilidades sean máximas.

SOLUCIÓN:

El importe total de la venta de x piezas es $F(x) = 200x$.

Las utilidades al vender x piezas serán:

$$U(x) = F(x) - C(x) = 200x - (500000 + 80x + 0.003x^2)$$

Dado que la capacidad de producción es cuando más de $30,000$ piezas mensualmente, el dominio de la función $U(x)$ es el intervalo $\left(0, 30000\right]$.

$$\frac{d}{dx}U(x) = 120 - 0.006x$$

Si

$$\frac{d}{dx}U(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.006x = 120$$

Luego el valor crítico es $x_1 = \dfrac{120}{0.006} = 20,000 \in \left(0, 30000\right]$

Si $x < 20,000$, $\dfrac{d}{dx}U(x) > 0$

Si $x > 20,000$, $\dfrac{d}{dx}U(x) < 0$

Por lo cual $U(x)$ es máxima para $x_1 = 20,000$

Para que las utilidades sean máximas, la empresa debe producir y vender mensualmente $20,000$ piezas.

VARIACIÓN DE FUNCIONES



EJERCICIOS PROPUESTOS

Investigar si es aplicable el teorema de Rolle a la función en el intervalo dado. En caso afirmativo determinar el valor o los valores de la variable independiente donde se verifica; si no es aplicable, explicar porqué no lo es.

IV.41 $f(x) = x^2 + 4x$ en $[-4, 0]$

IV.42 $f(x) = 8 - \sqrt{25 - x^2}$ en $[-4, 4]$

IV.43 $f(x) = x^3 - 27x + 4$ en $\left[-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right]$

IV.44 $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ en $[-1, 1]$

IV.45 $f(x) = 3 - x^{\frac{2}{3}}$ en $[-2, 2]$

IV.46 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & si \quad x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 6 & si \quad x > 2 \end{cases}$ en $[0, 4]$

IV.47 $f(x) = \begin{cases} x + 5 & si \quad -5 \leq x < 0 \\ \sqrt{25 - x^2} & si \quad 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$ en $[-5, 5]$

IV.48 $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ en $[-3,\ 1]$

IV.49 $f(x) = 3 - |x+2|$ en $[-5,\ 1]$

IV.50 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ en $[-1,\ 1]$

Investigar si es aplicable el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial; en caso afirmativo obtener el o los valores de $''x''$ donde se verifica; en caso negativo indicar porqué no es aplicable.

IV.51 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en $[1,\ 4]$

IV.52 $f(x) = 3x^2 + 6x - 5$ en $[-2,\ 1]$

IV.53 $f(x) = \sqrt{x-2}$ en $[3,\ 6]$

IV.54 $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$ en $[1,\ 2]$

IV.55 $f(x) = |x-3|$ en $[2,\ 6]$

IV.56 $f(x) = \frac{1}{x} + x$ en $[1, 2]$

IV.57 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

IV.58 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ en $[-1, 2]$

IV.59 $f(x) = \begin{cases} 6 - \sqrt{25 - x^2} & \text{si} \quad -5 < x \leq 3 \\ \frac{1}{4}(3x - 1) & \text{si} \quad 3 < x \leq 7 \end{cases}$ en $[-4, 7]$

IV.60 $f(x) = (x-8)^{\frac{2}{3}} - 1$ en a) $[4, 16]$

b) $[0, 8]$

IV.61 Estimar un valor aproximado de $\sqrt[4]{17}$ empleando el Teorema del Valor Medio del Calculo Diferencial.

IV.62 Empleando el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial, calcular un valor aproximado de $\sqrt[5]{83}$.

Determinar los intervalos donde la función es creciente o decreciente y sus valores máximos y mínimos relativos. Trazar la gráfica.

IV.63 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

IV.64 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$

IV.65 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 12x$

IV.66 $f(x) = x^4 - 4x + 2$

IV.67 $f(x) = x^4 + 2x^3$

IV.68 $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$

IV.69 $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 12x^2$

IV.70 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

IV.71 $f(x) = x^5 - 5x^4$

IV.72 $f(x) = x + \frac{1}{x}$

IV.73 $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$

IV.74 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

IV.75 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

IV.76 $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} \quad ; \quad x > -1$

IV.77 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$

IV.78 $f(x) = (x+2)^2 (1-x)^2$

IV.79 $f(x) = x\sqrt{3-x}$

IV.80 $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$

IV.81 $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2x+4}$

IV.82 $f(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$

Determinar los valores máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones.

IV.83 $f(x) = -x^2+1$ en el intervalo $[-2,\ 2]$

IV.84 $f(x) = -x^3-6x^2+9x$ en el intervalo $[0,\ 3]$

IV.85 $f(x) = (x-3)^2$ en el intervalo $[0,\ 4]$

IV.86 $f(x) = \dfrac{4}{3}\sqrt{9x^2}$ en el intervalo $[-3,\ 3]$

IV.87 $f(x) = 2-\sqrt{x-4}$ en el intervalo $[4,\ 29]$

Analizar la función determinando sus máximos y mínimos relativos, así como el sentido de la concavidad y los puntos de inflexión de su gráfica. Trazar la gráfica.

IV.88 $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$

IV.89 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$

IV.90 $y = (1 - x)^3$

IV.91 $f(x) = (x^2 - 2)^2$

IV.92 $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 1$

IV.93 $f(x) = 6 + 8x^2 - x^4$

IV.94 $y = 1 - x^{\frac{1}{3}}$

IV.95 $f(x) = \dfrac{2}{x - 3}$

IV.96 $y = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$

IV.97 $f(x) = \dfrac{3}{(x + 2)^2}$

IV.98 Expresar el número 10 como la suma de dos números no negativos cuyo producto sea el mayor posible.

IV.99 Dos números no negativos son tales que la suma del triple de uno más el doble del otro es 24 . ¿Cuáles deben ser los números para que su producto sea el mayor posible?

IV.100 La suma del doble de un número positivo y el quíntuple de otro número positivo debe ser 70 . Determinar los dos números de modo que su producto sea máximo.

IV.101 Si se resta un número entero $"b"$ de otro número entero $"a"$, la diferencia es 20 . Determinar dichos números si su producto debe ser el menor posible.

IV.102 La suma de los cuadrados de dos números no negativos debe ser la menor posible. Determinarlos sabiendo que su suma debe ser uno.

IV.103 El perímetro $"k"$ de un rectángulo es constante, hacer ver que su área es máxima si se trata de un cuadrado.

IV.104 En un aserradero se requiere cortar una viga de sección rectangular de área máxima a partir de un tronco de sección circular de $26\ cm$ de radio. Obtener las dimensiones de la sección de la viga.

IV.105 Un triángulo isósceles de base y altura variables, esta inscrito en una circunferencia de $1.00\ m$ de radio. Determinar sus dimensiones para que su área sea la mayor posible.

IV.106 La diagonal de un rectángulo de dimensiones variables mide 8 decímetros, obtener las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

IV.107 En un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $60\ cm$ y $80\ cm$ está inscrito un rectángulo de lados x e y, dos de cuyos lados son colineales con los catetos del triángulo. Determinar las longitudes de x e y que hacen que el área del rectángulo sea máxima.

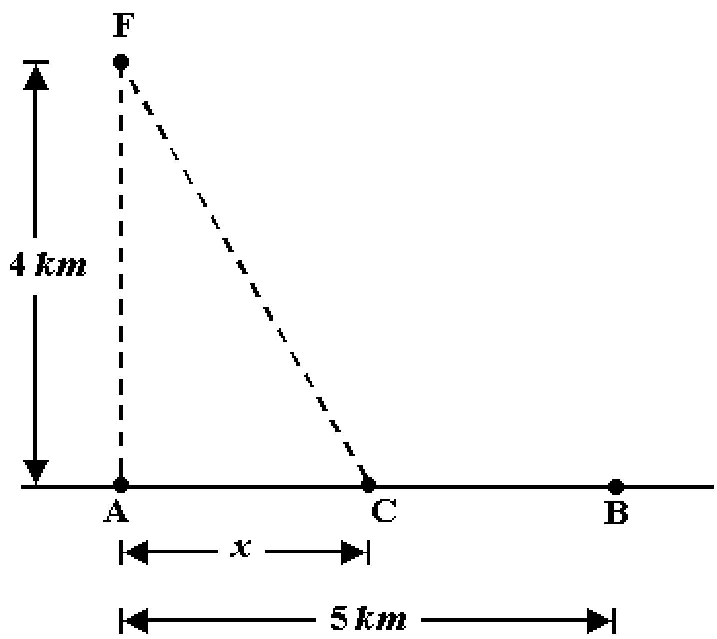
IV.108 Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima que pueden inscribirse en un semicírculo de radio fijo R .

IV.109 Un terreno rectangular de $60\ m^2$ va a cercarse empleando dos tipos de cerca. En dos lados paralelos se usará una cerca que cuesta $\$\,30.00$ el metro y en los otros dos lados se empleará otra cerca que cuesta $\$\,20.00$ el metro. Calcular las dimensiones del terreno tal que la cerca tenga el menor costo.

IV.110 Un alambre de $12\ cm$ de longitud se cortará en dos partes una de las cuales se doblará para formar un cuadrado y la otra para formar un círculo. Determinar las longitudes de las dos partes para que la suma de las áreas del cuadrado y del circulo sea mínima.

IV.111 A partir de una lámina rectangular de $80\ cm$ de largo y $60\ cm$ de ancho se va a construir una caja sin tapa, cortando cuadrados iguales de lado $"x"$ en cada esquina, doblando los lados hacia arriba y soldando las aristas que resultan. Determinar el valor de $"x"$ con el cual la capacidad de la caja es la mayor posible.

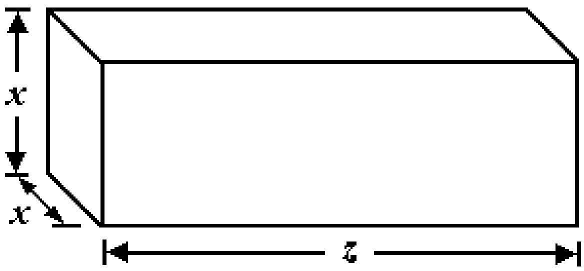
IV.112 Un faro F está a $4\ km$ del punto A, que es el más cercano al faro sobre la costa, y el punto B esta sobre la costa a $5\ km$ del punto A. El guardafaros requiere trasladarse del faro al punto B, remando en un bote a razón de $2\ km$ por hora y caminando a lo largo de la costa a una velocidad de $3\ km$ por hora. Determinar la distancia x del punto A al punto C donde debe desembarcar, para emplear el menor tiempo posible en la trayectoria FCB.



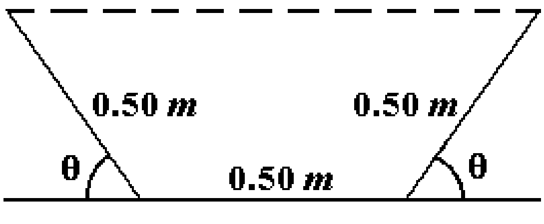
IV.113 El área total de cartón que debe emplearse en la fabricación de una caja rectangular de base cuadrada sin tapa es de $1200\ cm^2$ ¿Cuál es la capacidad máxima de la caja?

IV.114 Un bote en forma de prisma recto de base cuadrada del lado $"x"$ y altura $"h"$ con tapa, deberá tener una capacidad de 6 litros. Determinar sus dimensiones de modo que el área de lámina empleada en fabricarlo sea mínima.

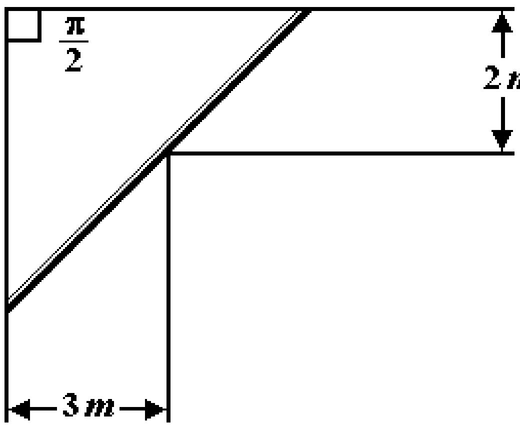
IV.115 Se construirá una caja cerrada con forma de paralelepípedo recto, dos de cuyas caras opuestas serán cuadradas de lado $"x"$, siendo $"z"$ la longitud de las otras cuatro caras. Determinar los valores de $"x"$ y $"z"$ que hacen máximo el volumen de la caja si la suma de las longitudes de todas sus aristas debe ser $2.40\ m$.



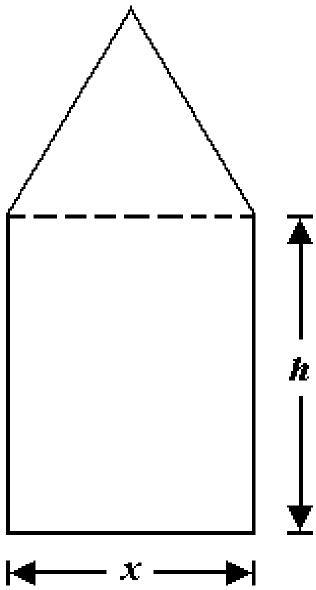
IV.116 Se hará un canalón de forma trapezoidal a partir de una lámina larga de $1.50\ m$ de ancho, doblándola en tres partes iguales como se ve en la figura. Determinar el ángulo θ para que el área de la sección transversal sea lo más grande posible.



IV.117 Una pasillo de $2.00\ m$ de ancho desemboca ortogonalmente en un corredor de $3.00\ m$ de ancho como se ve en la figura. Determinar la longitud "l" del tramo recto de tubo más largo que puede pasar horizontalmente del pasillo al corredor, sin tomar en cuenta el diámetro del tubo.



IV.118 El perímetro de una ventana en forma de un rectángulo coronado por un triángulo equilátero debe ser de 5 metros. Determinar las dimensiones "x" y "h" del rectángulo para que la ventana tenga la mayor área posible.



IV.119 El área de la superficie total de un cilindro circular recto es de $3\ m^2$. Determinar el radio y la altura del cilindro para que su volumen sea máximo.

IV.120 Se requiere constituir un tanque en forma de prisma de base cuadrada abierto por arriba, que tenga una capacidad de 125 litros. El costo del fondo es de $\$4.00$ por m^2 y las caras laterales cuestan $\$2.00$ por m^2. Dimensionar el tanque para que su costo sea mínimo.

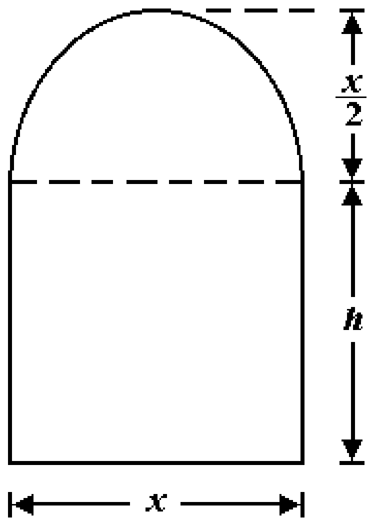
IV.121 Determinar el radio y la altura del cilindro circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de radio fijo R.

IV.122 Un cilindro circular recto de radio $"r"$ y la altura $"h"$ está inscrito en una esfera de radio constante R. Determinar $"r"$ y $"h"$ de modo que el área de la superficie lateral del cilindro sea máxima.

IV.123 Dos aviones vuelan a la misma altura en trayectorias rectas perpendiculares entre sí. A las $12:00$ horas el avión A está a $130\ km$ del avión B y este cruza la trayectoria del A. El avión B vuela a una velocidad de $150\ km$ por hora y el A a $100\ km$ por hora acercándose al punto de intersección de las trayectorias. ¿A qué hora la distancia entre ellos será la mínima?

IV.124 Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en la región definida por la parábola de ecuación $y^2 - 4x = 0$ y la recta $x = 4$

IV.125 Determinar las dimensiones $"x"$ y $"h"$ de una ventana de forma rectangular con cerramiento circular como se ve en la figura, si su perímetro es de $4\ m$ y su área es máxima.



IV.126 Se va a apuntalar un muro vertical con una viga que debe pasar sobre una barda de $2.50\ m$ de altura paralela al muro y que está a $2.0\ m$ del mismo. Determinar la menor longitud posible de la viga.

IV.127 Un cono circular recto de dimensiones variables está circunscrito alrededor de una esfera de $20\ cm$ de radio. Determinar la altura y el radio del cono de modo que su volumen sea el menor posible.

IV.128 Un cartel rectangular debe tener 18 decímetros cuadrados de área. Los márgenes laterales serán de $5\ cm$ de ancho y los márgenes superior e inferior deben ser de $7.5\ cm$. Obtener las dimensiones del cartel para que el área de la superficie impresa sea máxima.

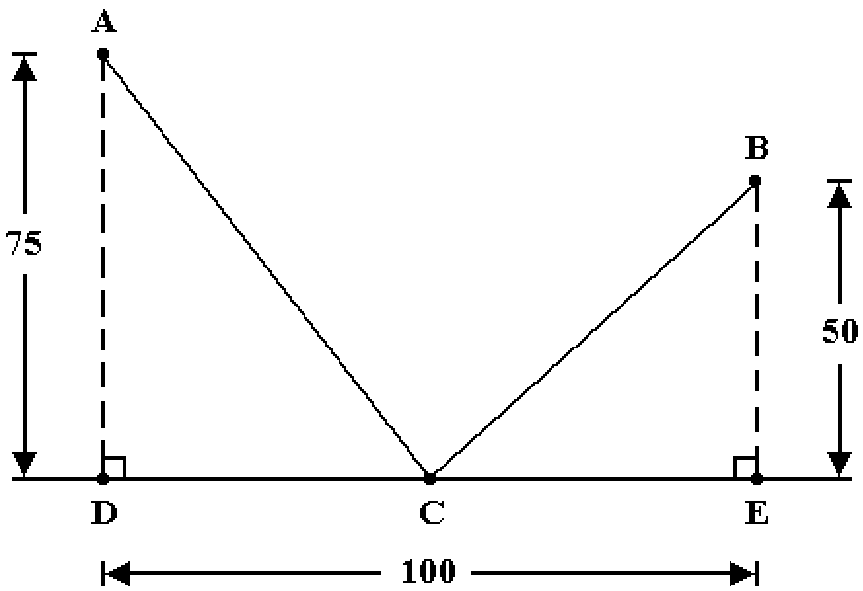
IV.129 A una fábrica de televisores le cuesta, $\$\left(\frac{x^2}{4}+35x+25\right)$ la producción total de x aparatos al día, y los vende a $\$\left(50-\frac{x}{2}\right)$ por unidad.
¿Cuántos televisores debe producir y vender diariamente para que su utilidad sea la mayor posible?.

IV.130 Una recta que pasa por el punto $P(3,\ 4)$ forma con los ejes coordenados un triángulo en el primer cuadrante cuya área es mínima, determinar su ecuación.

IV.131 En la elipse de ecuación $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{225}=1$ está inscrito un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados. Determinar las dimensiones del rectángulo si su área es máxima .

IV.132 La barda de un edificio mide $2.40\ m$ de altura y está a $1.00\ m$ del edificio. Obtener la longitud de la escalera más corta que apoyada en el piso, llegue al edificio por encima de la barda.

IV.133 Dos edificios A y B están a $75\ m$ y $50\ m$ respectivamente de los puntos más cercanos D y E de una línea telefónica recta. La distancia entre los puntos D y E es de $100\ m$. Los dos edificios se van a conectar a la línea telefónica en el mismo punto C. Determinar la distancia del punto C a cada uno de los puntos D y E para que la longitud total de cable $\overline{AC} + \overline{CB}$ sea mínima.



S U C E S I O N E S
Y
S E R I E S



E J E R C I C I O S
R E S U E L T O S

Escribir cuatro términos más de cada sucesión y una expresión que represente el término general (enésimo).

V.1 $1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots$

SOLUCIÓN:

$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots,\qquad a_n = (-1)^{n+1}$ o $a_n = sen\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$

V.2 $-1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots$

SOLUCIÓN:

$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots,\qquad a_n = (-1)^n$ o $a_n = cos\, n\pi$

V.3 $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5}, \ldots$

SOLUCIÓN:

$-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{9}, \ldots,\qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

V.4 $0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{2}, \ldots$

SOLUCIÓN:

$0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{8},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{10}, \ldots,\qquad a_n = \frac{n-1}{n+2}$

V.5 $-2\,,\ -\frac{1}{3}\,,\ 0\,,\ \frac{1}{7}\,,\ \frac{2}{9}\,,\ldots$

SOLUCIÓN:

$-2\,,\ -\frac{1}{3}\,,\ 0\,,\ \frac{1}{7}\,,\ \frac{2}{9}\,,\ \frac{3}{11}\,,\ \frac{4}{13}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{6}{17}\,,\ldots,\qquad a_n = \frac{n-3}{2n-1}$

V.6 $1\,,\ 1\,,\ \frac{3}{4}\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{5}{6}\,,\ldots$

SOLUCIÓN:

$1\,,\ 1\,,\ \frac{3}{4}\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{5}{16}\,,\ \frac{3}{16}\,,\ \frac{7}{64}\,,\ \frac{1}{16}\,,\ \frac{9}{256}\,,\ldots,\qquad a_n = \frac{n}{2^{n-1}}$

V.7 $-2\,,\ 4\,,\ -6\,,\ 8\,,\ldots$

SOLUCIÓN:

$-2\,,\ 4\,,\ -6\,,\ 8\,,\ -10\,,\ 12\,,\ -14\,,\ 16\,,\ldots,\qquad a_n = 2n\,(-1)^n$

V.8 $1\,,\ 0\,,\ -\frac{1}{5}\,,\ -\frac{2}{7}\,,\ldots$

SOLUCIÓN:

$1\,,\ 0\,,\ -\frac{1}{5}\,,\ -\frac{2}{7}\,,\ -\frac{1}{3}\,,\ -\frac{4}{11}\,,\ -\frac{5}{13}\,,\ -\frac{2}{5}\,,\ldots,\quad a_n = \frac{2-n}{2n-1}$

V.9 $1\,,\ -\frac{2}{3}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ -\frac{4}{27}\,,\ldots$

SOLUCIÓN:

$$1\,,\ -\frac{2}{3}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ -\frac{4}{27}\,,\ \frac{5}{81}\,,\ -\frac{2}{81}\,,\ \frac{7}{729}\,,\ -\frac{8}{2187}\,,\ldots\,,\qquad a_n=\frac{n\,(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}$$

V.10 $b\,,\ b^2\,,\ \frac{b^3}{2}\,,\ \frac{b^4}{6}\,,\ldots$

SOLUCIÓN:

$$b,\ b^2,\ \frac{b^3}{2},\ \frac{b^4}{6},\ \frac{b^5}{24},\ \frac{b^6}{120},\ \frac{b^7}{720},\ \frac{b^8}{5040}\,,\ldots\,,\qquad a_n=\frac{n b^n}{n!}$$

V.11 Dada $\{\,f\,(n)\,\}=\left\{\frac{n^2+1}{2n}\right\}$, determinar sus elementos, segundo, quinto, duodécimo y décimo quinto.

SOLUCIÓN:

$$f\,(2)=\frac{4+1}{4}=\frac{5}{4}$$

$$f\,(5)=\frac{25+1}{10}=\frac{13}{5}$$

$$f\,(12)=\frac{144+1}{24}=\frac{145}{24}$$

$$f\,(15)=\frac{225+1}{30}=\frac{113}{15}$$

V.12 Si $F(n) = F(n-2) + F(n-1)$ y $F(1) = -3$, $F(2) = 1$, escribir los primeros diez términos de la sucesión.

SOLUCIÓN:

$-3, 1, -2, -1, -3, -4, -7. -11, -18, -29$

V.13 Dada $F(n) = F(n-2) + F(n-1)$ y $F(1) = 0$, $F(2) = -1$, escribir los primeros doce términos de la sucesión.

SOLUCIÓN:

$0, -1, -1, -2, 3, -5, 8, -13, 21, -34, 55, -89$

V.14 Sabiendo que $F(n) = F(n-2) + F(n-1)$ y que $F(2) = 2$, $F(3) = 3$, escribir los primeros ocho términos de la sucesión.

SOLUCIÓN:

$5, 2, 3, -1, 4, -5, 9, -14$

Indicar si la sucesión es convergente o divergente. Si es convergente determinar su límite.

V.15 $\left\{ \dfrac{3n}{n^2+1} \right\}$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{3(0)}{1+0} = 0$$

La sucesión converge a 0

V.16 $\left\{ \dfrac{4n^2 - 3n + 5}{2n^2 - 7} \right\}$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 3n + 5}{2n^2 - 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 - \frac{7}{n^2}} = \frac{4 - 0 + 0}{2 - 0} = 2$$

La sucesión converge a 2

V.17 $\left\{ \dfrac{3}{2n} + \dfrac{2n^2 - 7n + 6}{4n^2 - 5n + 1} \right\}$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2n} + \frac{2n^2 - 7n + 6}{4n^2 - 5n + 1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2n} + \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 7n + 6}{4n^2 - 5n + 1} =$$

$$= \frac{3}{2}(0) + \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{7}{n} + \frac{6}{n^2}}{4 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La sucesión converge a $\dfrac{1}{2}$

V.18 $\left\{ \dfrac{2n^3+n-1}{4n^2+3} \right\}$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+n-1}{4n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{4}{n}+\dfrac{3}{n^3}} = \frac{2}{0}$$

La sucesión es divergente

V.19 $\left\{ \dfrac{2n(-1)^n}{3n-4} \right\}$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n(-1)^n}{3n-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n-4} \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

Aún cuando $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n}{3n-4} = \dfrac{2}{3}$, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe luego la sucesión es divergente

V.20 $\left\{ \dfrac{1}{3^n} \right\}$

SOLUCIÓN:

$\left\{ \dfrac{1}{3^n} \right\} = \left\{ \left(\dfrac{1}{3} \right)^n \right\}$ esta sucesión es de la forma $\left\{ r^n \right\}$ con $r = \dfrac{1}{3}$, como $|r| = \left| \dfrac{1}{3} \right| = \dfrac{1}{3} < 1$, converge a 0.

V.21 $\left\{ \left(\frac{5}{2} \right)^n \right\}$

SOLUCIÓN:

La sucesión es de la forma $\left\{ r^n \right\}$ con $r = \frac{5}{2}$, como $\left| r \right| = \left| \frac{5}{2} \right| = \frac{5}{2} > 1$, luego es divergente.

V.22 $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{n^3}} \right) \right\}$

SOLUCIÓN:

$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{n^3}} \right) \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{n^{\frac{3}{2}}}} \right) \right\}$ es del tipo $\left\{ \frac{1}{n^n} \right\}$ con $r = \frac{3}{2}$, que es racional positivo, entonces la sucesión converge a 0

V.23 $\left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - 2 \right\}$

SOLUCIÓN:

$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - 2 \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} - \lim_{n \to \infty} 2 = 0 + 2 = 2$ es del tipo $\left\{ \frac{1}{n^n} \right\}$

Indicar si la sucesión es monótona o no, y si es acotada.

V.24 $\left\{ \dfrac{3n^2}{2} \right\}$

SOLUCIÓN:

$$\left\{ \frac{3n^2}{2} \right\} = \left\{ \frac{3}{2} ,\ 6\ \frac{27}{2} ,\ 24 ,\ \ldots \right\}$$

Es monótona por ser creciente, $a_{n+1} > a_n$ no es acotada, no existe un número $c > 0$ tal que $|a_n| \le c$

V.25 $\left\{ 3(-1)^n \right\}$

SOLUCIÓN:

$$\left\{ 3(-1)^n \right\} = \left\{ -3 ,\ 3 ,\ -3 ,\ 3 ,\ \ldots \right\}$$

No es creciente ni decreciente, luego no es monótona es acotada ya que $|a_n| \le 3$

V.26 $\left\{ \dfrac{2}{5n^2} \right\}$

SOLUCIÓN:

$$\left\{ \frac{2}{5n^2} \right\} = \left\{ \frac{2}{5} ,\ \frac{1}{10} ,\ \frac{2}{45} ,\ \frac{1}{40} ,\ \ldots \right\}$$

Es monótona por ser decreciente, $a_{n+1} < a_n$ es acotada, $|a_n| \le \dfrac{2}{5}$

V.27 $\left\{ \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right\}$

SOLUCIÓN:

$$\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right\} = \left\{ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ \dots \right\}$$

No es monótona pues no es creciente ni decreciente, sí es acota ya que $|a_n| \le \dfrac{1}{2}$.

Determinar el carácter de la serie dada aplicando el criterio de comparación,

sabiendo que:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$

es convergente.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} = \frac{2}{2(4)} + \frac{4}{3(5)} + \frac{5}{4(6)} + \frac{6}{5(7)} + \dots + \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} + \dots$

es divergente

V.28 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{n^2+1} + \dots$$

Si $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ y $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ se observa que $a_n < b_n$ esto es,

$\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2}$, luego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ es convergente.

V.29 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \ldots + \frac{n+2}{n+1} + \ldots$$

Si tiene

$\frac{n+2}{n+1} > \frac{n+2}{(n+1)(n+3)}$; ya que $n+2 > \frac{n+2}{n+1}$, se concluye que

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$ es divergente.

V.30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{18} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{2n^2} + \ldots$$

Como se cumple que $\forall\, n \in IN \quad \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{n^2}$, y se sabe que la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, se concluye que la serie dada es convergente.

V.31 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(n+2)}{2n+6}$

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(n+2)}{2n+6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(n+2)}{2(n+3)}$$

$\frac{3(n+2)}{2(n+3)} > \frac{n+2}{(n+1)(n+3)}$ ya que $\frac{3(n+2)}{2} > \frac{n+2}{n+1}$

Luego la serie dada es divergente.

V.32 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{n+3}$

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{n+3}$$

Hagamos ver que $\frac{2(n+1)}{n+3} > \frac{n+2}{(n+1)(n+3)}$, en efecto,

$2(n+1) > \frac{n+2}{n+1}$; $2(n+1)^2 > n+2$; $2n^2 + 4n + 2 > n+2$;

$2n(n+2) + 2 > n+2$, entonces la serie dada es divergente.

Determinar si la serie dada converge o diverge. En el primer caso calcular su suma

V.33 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n}$

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{9}{2} + \frac{27}{4} + \frac{81}{8} + \frac{243}{16} + \dots$$

Se puede escribir $a_n = \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ que

es una serie geométrica con $r = \frac{3}{2}$, $|r| > 1$ por lo cual es divergente.

V.34 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n}}$

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n}} = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \dots$$

Puede escribirse:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Se trata de una serie geométrica con $r = \frac{1}{3}$, y primer término $a = \frac{4}{3}$ como $|\, r \,| = \frac{1}{3} < 1$ la serie converge, su suma es,

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$$

V.35 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n}}$

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

que es una serie geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$, como $|\, r \,| = \frac{1}{2} < 1$ la serie es convergente, su suma es,

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

V.36 $\sum_{n=1}^{\infty} (0.9)^n$

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (0.9)^n = 0.9 + 0.81 + 0.729 + 0.6561 + \ldots$$

Se puede escribir $\sum_{n=1}^{\infty} (0.9)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10} \left(\frac{9}{10} \right)^{n-1}$ Ésta es una serie geométrica con $a = \frac{9}{10}$ y $r = \frac{9}{2}$, como $|r| = \frac{9}{10} < 1$ la serie converge, su suma es,

$$S = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{9}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 9$$

V.37 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n$

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ que es una serie geométrica con $a = -\frac{1}{2}$ y $r = -\frac{1}{2}$; como $|r| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$, la serie es convergente

$$S = \frac{-\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$$

V.38 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10)^n}$

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(10)} \right)^n = 0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(10)} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10} \left(\frac{1}{(10)} \right)^{n-1}$, serie geométrica que es convergente

porque $r = \frac{1}{10}$, $|\, r \,| = \frac{1}{10} < 1$ como $a = \frac{1}{10}$, $S = \dfrac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}$

V.39 Expresar el número decimal ilimitado periódico $0.6666\ldots$ como una serie geométrica y determinar su suma si converge.

SOLUCIÓN:

El número dado se puede escribir como la suma:

$$0.6666\ldots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots + \frac{6}{(10)^n} + \ldots$$

Esta suma se puede escribir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(10)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10} \left(\frac{1}{(10)} \right)^{n-1}$$

Esta serie converge por tener $r = \frac{1}{10}$, $|\, r \,| = \frac{1}{10} < 1$ como $a = \frac{6}{10}$,

$$S = \frac{\frac{6}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \qquad 0.6666\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10} \left(\frac{1}{(10)} \right)^{n-1} = \frac{2}{3}$$

V.40 Escribir el número decimal ilimitado periódico (racional) $A = 0.252525\ldots$ como una serie geométrica y expresarlo en la forma de un cociente de números enteros.

SOLUCIÓN:

Se puede escribir:

$$A = \frac{25}{100} + \frac{25}{10{,}000} + \frac{25}{1'000{,}000} + \ldots$$

$$= \frac{25}{(10)^2} + \frac{25}{(10)^4} + \frac{25}{(10)^6} + \ldots + \frac{25}{(10)^{2n}} + \ldots$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{25}{(10)^{2n}} = 25 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10)^{2n}}$$

que es una serie geométrica con $a = \frac{1}{(10)^2}$, $|r| = \frac{1}{(10)^2} < 1$,convergente,

$$A = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{(10)^2}}{1 - \frac{1}{(10)^2}} = \frac{\frac{1}{(10)^2}}{\frac{(10)^2 - 1}{(10)^2}} = \frac{1}{99}$$, luego $A = \frac{25}{99}$

Determinar el carácter de las siguientes series.

V.41 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

SOLUCIÓN:

Se trata de una serie $''\,p\,''$ en la que $p = 3 > 1$ por lo cual es convergente

V.42 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

SOLUCIÓN:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$, ésta es una serie $"p"$ con $p = \frac{1}{3} < 1$, luego divergente.

V.43 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{16}{n} \right)^{\frac{1}{4}}$

SOLUCIÓN:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{16}{n} \right)^{\frac{1}{4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{1}{4}}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$, es una serie $"p"$ en donde $p = \frac{1}{4} < 1$, luego la serie dada es divergente.

V.44 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{\frac{81}{n^5}}$

SOLUCIÓN:

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{\frac{81}{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{81} \sqrt[4]{\frac{1}{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$, es una serie tipo $"p"$ en donde $p = \frac{5}{4} > 1$. La serie dada es convergente.

V.45 Escribir la suma infinita $4+1+\frac{4}{9}+\frac{1}{4}+\frac{4}{25}+\ \dots$ como una serie y determinar el carácter de ésta.

SOLUCIÓN:

El término enésimo de la suma es de la forma $a_n=\frac{4}{n^2}$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Esta serie es del tipo $"p"$ siendo $p=2>1$ por lo cual es convergente.

Elegir una serie apropiada de carácter conocido y determinar el carácter de la serie dada empleando el criterio de comparación.

V.46 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2\sqrt{x}}$

SOLUCIÓN:

Consideremos la serie armónica, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Que se sabe que es divergente.

Se puede escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2\sqrt{n}}=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Como $\frac{1}{\sqrt{n}}\ \geq\ \frac{1}{n}\quad\forall\ n\in IN$, se concluye que la serie dada es divergente.

V.47 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

SOLUCIÓN:

La serie geométrica, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ es convergente dado que .

$r = \frac{1}{2} < 1$, ahora bien,

Se puede escribir $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n} \quad \forall \ n \in IN \ , \ n > 1$

V.48 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

SOLUCIÓN:

Empleando serie geométrica, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ que es convergente se tiene

$$\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n} \quad \forall \ n > 2 \ , \ n \in IN \ .$$

Esto hace ver que la serie dada es convergente.

V.49 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos^2 n}{3^n}$ (Desde luego n en radianes)

SOLUCIÓN:

Consideremos la serie geométrica, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n$ que es convergente

$\left(\ | \ r \ | = \frac{1}{3} < 1 \right)$, $\frac{cos^2 n}{3^n} < \frac{1}{3^n} \quad \forall \ n \in IN$ ya que $\frac{cos^2 n}{3^n} < 1 \quad \forall \ n \in IN$,

entonces la serie dada es convergente.

V.50 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

SOLUCIÓN:

Tomemos como serie comparación a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que es una serie tipo "p" convergente porque $p = 2 > 1$, se tiene $\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$ y evidentemente: $\frac{1}{n^2 + 3n + 2} < \frac{1}{n^2}$ $\forall\, n \in IN$ se concluye que la serie dada es convergente.

V.51 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n - \sqrt{n}}$

SOLUCIÓN:

La serie armónica es divergente, así que la serie $\frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n}$ es divergente, se observa que $\frac{3}{2n - \sqrt{n}} > \frac{3}{2n}$ $\forall\, n \in IN$ entonces, la conclusión es que la serie dada es divergente.

V.52 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

SOLUCIÓN:

Comparando el término general de esta serie con el de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ que es convergente, se ve que $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}$ $\forall\, n \in IN$, $n \geq 4$, luego la serie dada es convergente.

V.53 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$

SOLUCIÓN:

En el ejemplo anterior se ve que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es una serie convergente, que ahora se puede emplear para la comparación:

$\displaystyle\frac{(n+1)^2}{(n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{n!\,(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n!\,(n+2)} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)\frac{1}{n!}$ Ahora bien,

$\displaystyle\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\frac{1}{n!} < \frac{1}{n!}$ $\forall\ n \in IN$ conclusión, la serie dada es convergente.

V.54 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

SOLUCIÓN:

Tomemos como serie de comparación $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ que es convergente por ser tipo $"p"$ con $p = \frac{3}{2} > 1$ se tiene $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2}$.

Ahora, $\displaystyle\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} < \frac{\sqrt{n}}{n^2}$ $\forall\ n \in IN$ por lo cual la serie dada es convergente.

V.55 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n} + |\cos n|}$

SOLUCIÓN:

Sea la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n}}$ que es convergente por ser geométrica con $r = \frac{1}{3} < 1$.

Haciendo la comparación $\dfrac{1}{3^{n} + |\cos n|} < \dfrac{1}{3^{n}} \quad \forall\ n \in IN$. Esto implica que la serie dada es convergente.

Empleando el criterio del cociente (o de D'Alembert), determinar el carácter de cada serie

V.56 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(10)^{n}}$

SOLUCIÓN:

$$a_{n} = \frac{n!}{(10)^{n}} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(10)^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(10)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{(10)^{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(10)^{n}\ (n+1)!}{(10)^{n+1}\ (n!)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10}\left[\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\ y \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10} = \infty \ .$$

Entonces la serie dada es divergente.

V.57 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$

SOLUCIÓN:

$$a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\ ,\quad a_{n+1}=(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{3}{4}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\,3^{n+1}}{4^{n+1}}}{\frac{n\,3^{n}}{4^{n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n}\,(n+1)\,3^{n+1}}{4^{n+1}\,(n)\,3^{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]=\frac{3}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{4}<1\ ,$$ la

serie es convergente.

V.58 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{9^{n}}$

SOLUCIÓN:

$$a_n=\frac{n!}{9^{n}}\ ,\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{9^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{9^{n+1}}}{\frac{n!}{9^{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,9^{n}}{n!\,9^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\ 9^{n}}{n!\,9^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n(n+1)\,9^{n}}{1\cdot2\cdot3\cdots n\,(9)}=\frac{1}{9}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

por lo cual la serie es divergente.

V.59 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^{n}}$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n+2}{3^{n+1}}}{\dfrac{n+1}{3^{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n}\,(n+2)}{3^{n+1}\,(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{(n+2)}{(n+1)}\right)\right] = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{1}{3}\,,$$ entonces la serie es convergente.

V.60 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{n+1}$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\dfrac{(n+1)}{n+2}}{\dfrac{4n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\,(n+1)^{2}}{4n(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}} = (1)(1) = 1\,.$$

El criterio no es concluyente, no se puede decir el carácter de la serie con él.

V.61 Investigar si la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+4}$ es convergente absolutamente, convergente condicionalmente o es divergente.

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+4} \quad ; \quad a_n = \frac{n}{n^2+4}$$

Aplicando las condiciones de la hipótesis del Teorema de Leibniz.

1. $a_n = \dfrac{n}{n^2+4} > 0 \quad \forall\ n \in IN$

2. Probar si $a_n > \dfrac{n+1}{(n+1)^2+4}$; $n\left[(n+1)^2 + 4 \right] \geq (n+1)\left(n^2+4 \right)$

$$n^3+2n^2+5n > (n+1)(n^2+4)$$

$$n^3+2n^2+5n > n^3+n^2+4n+4$$

$$n^2+5n > 4n+4$$

$$n^2+n > 4 \quad \forall\ n>1$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

La serie en estudio es convergente.

Ahora, la serie correspondiente de valores absolutos

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$ es convergente, por lo tanto la serie propuesta es absolutamente convergente.

V.62 Indicar si la serie de signos alternados $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt{n}$ converge o diverge.

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt{n} = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \ldots$$

$\lim_{n\to\infty} \left[(-1)^{n+1} \sqrt{n} \right]$ no existe, luego por el criterio de divergencia del enésimo término se concluye que la serie es divergente.

V.63 Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n^2}$ converge o diverge.

SOLUCIÓN:

Probando las condiciones de la hipótesis del Teorema de Leibniz,

1. $a_n = \frac{2}{n^2} > 0$

2. $a_n > a_{n+1}$ ya que $\frac{2}{n^2} > \frac{2}{(n+1)^2}$ porque $(n+1)^2 > n^2$

3. $\lim_{n\to\infty} = \frac{2}{n^2} = 0$

Se cumplen las tres condiciones, así que la serie es convergente.

V.64 Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ indicar si es convergente o divergente.

SOLUCIÓN:

Como se observa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Se deduce que $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ no existe, la serie es divergente.

V.65 Hacer ver que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}$ es convergente.

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} = 3 - \frac{3}{3} + \frac{3}{5!} - \frac{3}{7!} + \ldots + 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{40} - \frac{1}{1260} + \ldots$$

$$a_n = \frac{3}{(2n-1)!}$$

Según el Teorema de Leibniz

1. $a_n = \frac{3}{(2n-1)!} > 0 \quad \forall\ n \in IN$

2. $a_n > a_{n+1}, \quad \frac{3}{(2n-1)!} > \frac{3}{\left[2(n+1)-1\right]!} > \frac{3}{(2n+1)!} \Rightarrow (2n+1)! > (2n-1)$

3. $\lim_{n\to\infty} = a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(2n-1)!} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)!} = 3(0) = 0$

Luego la serie considerada es convergente.

V.66 Sea la serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

Investigar si diverge o converge, en el segundo caso, indicar si converge en forma absoluta o condicionalmente.

SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Leibniz

1. $a_n = \frac{1}{n} > 0 \quad \forall \ n \in IN$

2. $a_n > a_{n+1}$ ya que $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

3. $\lim\limits_{n \to \infty} = \frac{1}{n} = 0$

La serie satisface las tres condiciones del Teorema, luego es convergente. La serie correspondiente de valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es la serie armónica que diverge, entonces la serie dada es condicionalmente convergente.

V.67 Investigar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2}$ es divergente o convergente. En el segundo caso indicar si converge absoluta o condicionalmente.

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{18} + \frac{1}{32} - \frac{1}{50} + \ldots \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n^2}$$

1. $a_n = \frac{1}{2n^2} > 0 \qquad \forall\ n \in IR$

2. $a_n = \frac{1}{2n^2} > \frac{1}{2(n+1)^2}$; $(n+1)^2 > n^2 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$

3. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}(0) = 0$

Por lo anterior se ve que la serie es convergente.

La serie de valores absolutos correspondiente: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente y a que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es una "p" con $p = 2 > 1$, entonces la serie dada converge absolutamente.

V.68 Determinar si la siguiente serie es absoluta o condicionalmente convergente o divergente $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{2^n + 3}$

SOLUCIÓN:

Empleando el criterio de Leibniz

$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n + 3} = 0$ y como $a_{n+1} < a_n$ esto es: $\frac{2}{2^{n+1} + 3} < \frac{2}{2^n + 3}$ la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{2^n + 3}$ es convergente.

La serie de valores absolutos de esta serie es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n + 3}$$

Aplicando a ésta el criterio de D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{2^{n+1} + 3}}{\frac{2}{2^n + 3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2^n + 3)}{2(2^{n+1} + 3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3}{2^n 2+3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(1 + \frac{3}{2^n}\right)}{2^n\left(2 + \frac{3}{2^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{2^n}}{2 + \frac{3}{2^n}} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2} < 1$$

Como el límite es menor que 1 se concluye que la serie de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n + 3}$$

es convergente, por lo que la serie en estudio $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{2^n + 3}$ es absolutamente convergente.

V.69 Investigar si la siguiente serie alternante converge o diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{3n-1}$$

SOLUCIÓN:

Probando con las condiciones de la hipótesis del Teorema de Leibniz.

1. $a_n = \dfrac{2n}{3n-1} > 0 \quad \forall\ n \in IN$

2. $a_{n+1} < a_n \qquad \Rightarrow \quad \dfrac{2\,(n+1)}{3\,(n+1)-1} < \dfrac{2n}{3n-1}$

$$2\,(n+1)(3n-1) < 2n\left[\,3\,(n+1)-1\,\right]$$

$$(3n-1) < \frac{n}{n+1}\left[\,3\,(n+1)-1\,\right]$$

$$3n-1 < 3n-\frac{n}{n+1}$$

$$-1 < -\frac{n}{n+1} \qquad \forall\ n \in IN$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{3n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{3-\frac{1}{n}} = \dfrac{2}{3-0} = \dfrac{2}{3} \neq 0$

No se satisface la tercera condición del Teorema de Leibniz, por lo cual éste no es aplicable.

Busquemos el límite del enésimo término de la serie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{(-1)^n\,2n}{3n-1} \quad \nexists$$

se observa que este límite no existe, por lo cual según la prueba de la divergencia se concluye que la serie dada es divergente.

V.70 Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$ investigar si es divergente o convergente.

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1} \quad ;$$

Según el Teorema de Leibniz.

1. $a_n = \frac{n^2}{n^3+1} > 0 \quad \forall\, n \in IN$

2. $a_{n+1} < a_n \quad \Rightarrow \quad \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+1} < \frac{n^2}{n^3+1}$

$$(n+1)^2 (n^3+1) < n^2 \left[(n+1)^3 + 1 \right]$$

$$2n+1 < n^4 + 2n^3 + n^2 \qquad \forall\, n \in IN$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1+0} = 0$

Luego la serie es convergente.

V.71 Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n(n+1)}$ investigar si es convergente o divergente; en el primer caso determinar si es absoluta o condicionalmente convergente.

SOLUCIÓN:

Según el criterio de Leibniz,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Comparando a_{n+1} con a_n :

$$\frac{n+3+1}{(n+1)^2+n+1} < \frac{n+3}{n^2+1} \; ; \quad \frac{n+4}{(n+1)^2+n+1} < \frac{n+3}{n^2+1} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} < a_n$$

por lo que la serie es convergente.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}$ la serie de valores absolutos de la serie dada, analizando esta serie por el criterio de comparación.

Se puede escribir $\frac{n+3}{n(n+1)} = \frac{n+3}{n+1}\cdot\frac{1}{n} > \frac{1}{n}$

Ahora como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es la serie armónica que es divergente, se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}$ es divergente, por lo cual la serie dada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n(n+1)}$$

es condicionalmente convergente.

V.72 Dada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ investigar si es divergente o convergente, absolutamente o condicionalmente.

SOLUCIÓN:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} \quad ; \quad a_n = \frac{2^n}{n!}$$

Por el criterio de la razón o del cociente,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2}{n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1}$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 2(0) = 0 < 1$$

Esto hace ver que la serie es absolutamente convergente.

V.73 Investigar si la serie de signos alternados $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$ diverge o converge y en este último caso si es absolutamente o condicionalmente convergente.

SOLUCIÓN:

Aplicando el criterio del cociente, queda:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^2}{2n^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n (n+1)^2}{2^{n+1} n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2} < 1$$

Entonces la serie es absolutamente convergente.

V.74 Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\, n}{n^2}$, investigar si es convergente o divergente.

SOLUCIÓN:

Aplicando del criterio de razón.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\, n}{n^2} = sen 1 + \frac{sen 2}{4} + \frac{sen 3}{9} + \frac{sen 4}{16} + \frac{sen 5}{25} +$$

$$+ \frac{sen 7}{49} + \frac{sen 8}{64} + \frac{sen 9}{81} + \frac{sen 10}{100} + \dots$$

$$= 0.841471 + \frac{0.909297}{4} + \frac{0.141120}{9} +$$

$$- \frac{0.756802}{16} + \frac{0.958924}{25} + \frac{0.279415}{36}$$

$$+ \frac{0.656986}{49} + \frac{0.989358}{64} + \frac{0.412118}{81} +$$

$$- \frac{0.544021}{100} - \dots$$

Esta serie tiene términos positivos y negativos, pero no es una serie alternante o de signos alternados.

La serie de valores absolutos correspondiente es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{sen\, n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\, sen\, n\,|}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\,|\, sen\, n \,| \cdot \frac{1}{n^2} \right]$$

Se observa que $\frac{|\, sen\, n\,|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$ y sabiendo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, se tiene que ésta, “domina” a la serie de valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{sen\, n}{n^2} \right|$ misma que resulta ser convergente.

V.75 Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n$, obtener su intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN:

Aplicando del criterio del cociente se tiene:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{x^n}{2^n}} = \frac{2^n x^{n+1}}{2^{n+1} x^n} = \frac{x}{2} = r \text{ , luego}$$

$$\rho = \lim_{n \to \infty} r = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

Para que la serie converja es necesario que $\left| \frac{x}{2} \right| < 1$, esto es equivalente a $-1 < \frac{x}{2} < 1$ o sea el intervalo abierto $-2 < x < 2$.

Analizando lo que sucede con la serie en los extremos de este intervalo.

- Si $x = -2$ la serie adquiere la forma $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ que es divergente.
- Si $x = 2$ la serie es $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ diverge.

Por lo anterior se concluye que el intervalo de convergencia es $-2 < x < 2$.

V.76 Obtener el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

SOLUCIÓN:

Al aplicar el criterio del cociente resulta:

$$r = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{x^n}{n}} = \frac{n\,x^{n+1}}{(n+1)\,x^n} = \frac{n}{n+1}\,x$$

$$\lim_{n\to\infty} r = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\,x \right) x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\,x = x\,(1) = x$$

La serie es convergente si $|x| < 1$ o sea $-1 < x < 1$. En los extremos de este intervalo se tiene

- Si $x = -1$, la serie queda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es la serie armónica, divergente.

- Si $x = 1$, resulta la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ que es convergente.

Así que el intervalo de convergencia es $-1 < x \le 1$ o bien $(-1,\ 1]$

V.77 Determinar el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 - 3}$$

SOLUCIÓN:

Si se aplica el criterio del cociente queda:

$$r = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2 - 3}}{\dfrac{x^n}{n^2 - 3}} = \frac{x^{n+1}(n^2 - 3)}{x^n \left[(n+1)^2 - 3 \right]} = x \left[\frac{n^2 - 3}{(n+1)^2 - 3} \right]$$

$$\lim_{n \to \infty} r = x \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - 3}{(n+1)^2 - 3} = x(1) = x$$

Para que la serie sea convergente se requiere que $|x| < 1$ esto es $-1 < x < 1$. En los extremos de este intervalo:

- Si $x = -1$ la serie queda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 3}$ que es convergente.
- Si $x = 1$, la serie se convierte en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 3}$ que también es convergente.

Entonces el intervalo de convergencia es el intervalo cerrado $-1 \leq x \leq 1$ o sea $[-1, 1]$.

V.78 Sea la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{2^{n}\sqrt{n}}$, obtener su intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN:

Apliquemos el criterio del cociente

$$r = \left| \frac{a_{n+1}}{a_{n}} \right| = \frac{\dfrac{x^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}}{\dfrac{x^{n}}{2^{2}\sqrt{n}}} = \frac{2^{n}\sqrt{n}\; x^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}\; x^{n}} = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} r = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \right) = \frac{x}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{x}{2}(1) = \frac{x}{2} \qquad \text{como } \left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \quad -2 < x < 2$$

Al hacer el análisis en los extremos de este intervalo:

- Al hacer $x = -2$ la serie queda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n}}{2^{n}\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$ que es convergente.

- Si se toma $x = 2$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n}}{2^{n}\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ésta es divergente.

Por lo anterior se concluye que el intervalo de convergencia es $-2 \le x < 2$ o bien $[-2, 2)$.

V.79 Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n$ determinar el intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN:

Aplicando el criterio del cociente

$$r = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)x^{n+1}}{n x^n} = \frac{n+1}{n} x$$

$$\lim_{n \to \infty} r = x \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = x(1) = x$$

Entonces si $|x| < 1$ o sea si $-1 < x < 1$ la serie converge.

En los extremos de este intervalo se tiene:

- Si $x = -1$ queda la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} n$ que es divergente.

- Si $x = 1$, la serie queda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$ que también diverge.

El intervalo de convergencia es $-1 < x < 1$.

V.80 Obtener el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (3x)^n$$

SOLUCIÓN:

Aplicando el criterio del cociente,

$$r = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\dfrac{(3x)^{n+1}}{[2(n+1)]!}}{\dfrac{(3x)^n}{(2n)!}} = \frac{(3x)^{n+1}(2n)!}{(3x)^n (2n+2)!} =$$

$$= 3x \frac{(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} = 3x \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} r = 3x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 3x(0) = 0 = \rho$$

Como la serie es convergente para $|\rho| < 1$, cualquier valor de $x \in IR$ hace que la serie sea convergente.

El intervalo de convergencia es el conjunto de los números reales.

V.81 Determinar el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4n)! \left[\left(\frac{x}{4} \right)^{n} \right]$$

SOLUCIÓN:

Sea $r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, entonces,

$$r = \frac{\left(\frac{x}{4} \right)^{n+1} [4(n+1)]!}{\left(\frac{x}{4} \right)^{n}} = \frac{x}{4} \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 4n (4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 4n} \right]$$

$$r = \frac{x}{4} (4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)$$

$$\rho = \lim_{n \to \infty} r = \frac{x}{4} \lim_{n \to \infty} (4n+1)(4n+3)(4n+4) = \frac{x}{4} (\infty)$$

Como debe tenerse $|\rho| < 1$, para que la serie sea convergente. El intervalo de convergencia se reduce a un solo valor, $x = 0$.

V.82 Obtener el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{n5^n}$$

SOLUCIÓN:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+2}(x-5)^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{n5^n}} = \frac{(-1)^{n+2}(x-5)^{n+1}\, n5^n}{(-1)^{n+1}(x-5)^n\,(n+1)5^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)(x-5)n}{5(n+1)} = \left(\frac{5-x}{5}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} r = \frac{5-x}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{5-x}{5}(1) = \frac{5-x}{5}$$

Para que la serie converja debe tenerse $|\rho| < 1$, esto implica $\left|\frac{5-x}{5}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{5-x}{5} < 1 \quad -5 < 5-x < 5 \Rightarrow -10 < -x < 0 \Rightarrow 0 < x < 10.$

Analizando la serie en los extremos de éste intervalo $0 < x < 10$ se tiene,

- Si $x = 0$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-5)^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n 5^n}{n5^n} =$

  $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es divergente por ser la serie armónica de mismos signos.

- Si $x = 10$, la serie queda: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}5^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que es la serie armónica con signos alternados por lo que es convergente.

  Entonces el intervalo de convergencia es $0 < x < 10$ o bien $(0, 10]$.

V.83 Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n n^2}{5^n}$ determinar el intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN:

Aplicando el criterio del cociente se tiene,

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(x-1)^{n+1} (n+1)^2}{5^{n+1}}}{\frac{(x-1)^n \ n^2}{5^n}} = \frac{(x-1)^{n+1} 5^n (n+1)^2}{(x-1)^n \ 5^{n+1} n^2} = \left(\frac{x-1}{5} \right) \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 =$$

$$r = \frac{x-1}{5} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2$$

$$\rho = \lim_{n \to \infty} r = \frac{5-x}{5} \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{5-x}{5} (1) = \frac{5-x}{5}$$

La serie converge si $\left| \frac{x-1}{5} \right| < 1$ esto es si:

$$-1 < \frac{x-1}{5} < 1 \Rightarrow -5 < x - 1 < 5 \Rightarrow -4 < x < 6$$

Estudiando la naturaleza de la serie para los valores extremos del intervalo $-4 < x < 6$

- Si $x = -4$ queda: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 5^n}{n\, 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que es divergente.

- Si $x = 6$, se tiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n^2}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$ que también es divergente.

Por lo tanto el intervalo de convergencia es $0 < x < 10$ que puede escribirse $(-4 , \ 6)$

V.84 Obtener el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x - \frac{1}{2} \right)^{n}}{3^{n}}$$

SOLUCIÓN:

Al aplicar el criterio del cociente se obtiene,

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{\left(x - \frac{1}{2} \right)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\dfrac{\left(x - \frac{1}{2} \right)^{n}}{3^{n}}} = \frac{\left(x - \frac{1}{2} \right)^{n+1} 3^{n}}{\left(x - \frac{1}{2} \right)^{n} 3^{n+1}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{3} = \frac{2x-1}{6}$$

$$\underset{n\to\infty}{lím}\ r = \underset{n\to\infty}{lím} \frac{2x-1}{6} = \frac{2x-1}{6}$$

si $\left| \dfrac{2x-1}{6} \right| < 1$ la serie converge, o sea si

$$-1 < \frac{2x-1}{6} < 1 \quad \Rightarrow \quad -6 < 2x - 1 < 6 \quad \Rightarrow \quad -5 < 2x < 7 \quad \Rightarrow \quad -\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$$

Al analizar la serie en los extremos de este intervalo,

- Si $x = -\frac{5}{2}$ resulta la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n}}{3^{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}$ que es divergente.
- Si $x = \frac{7}{2}$, se tiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n}}{3^{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}$ que es divergente.

Así que el intervalo de convergencia es $-\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$ que puede expresarse: $\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right)$

V.85 Analizar la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}$ determinando su intervalo de convergencia

SOLUCIÓN:

Si $$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+2}(x-1)^{n+2}}{n+2}}{\dfrac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}} = \frac{(-1)^{n+2}(x-1)^{n+2}(n+1)}{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}(n+2)} =$$

$$r = \frac{(-1)(x-1)(n+1)}{n+2} = (1-x)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} r = (1-x)\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = (1-x) = 1-x$$

Para que la serie converja debe cumplirse $|\,p\,| < 1$ esto es:

$$|\,1-x\,| < 1 \;\Rightarrow\; -1 < 1-x < 1 \;\Rightarrow\; -2 < -x < 0$$

o sea $0 < x < 2$

Investigando que se tiene en los extremos de este intervalo

- Si $x = 0$ la serie queda $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+2}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$

  que es divergente por ser la serie armónica.

- Si $x = 2$, se tiene $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ que es la serie armónica con signos alternados, por lo cual es convergente.

  El intervalo de convergencia es $0 < x \le 2$ o bien $(0,\ 2]$

V.86 Considérese la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}}$ determinar su intervalo de convergencia

SOLUCIÓN:

Si $r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(x-2)^{n+2}}{(n+2)\,3^{n+2}}}{\dfrac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}}} = \frac{(x-2)^{n+2}\,(n+1)\,3^{n+1}}{(x-2)^{n+1}\,(n+2)\,3^{n+2}} =$

$$r = \frac{(x-2)(n+1)}{(n+2)\,3} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)\frac{x-2}{3}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} r = \frac{x-2}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{x-2}{3}(1) = \frac{x-2}{3}$$

$$|\rho| < 1 \;\Rightarrow\; \left|\frac{x-2}{3}\right| < 1 \;\Rightarrow\; -1 < \frac{x-2}{3} < 1 \;\Rightarrow\; -3 < x-2 < 3$$

Esto es $-1 < x < 5$

En los extremos de este intervalo

- Si $x = -1$ la serie queda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ que es la serie armónica con signos alternados, por lo que es convergente.

- Si $x = 5$, resulta la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ que es divergente por ser la serie armónica.

  Por lo tanto el intervalo de convergencia es $1 \le x < 5$ que puede escribirse $[-1,\ 5)$

V.87 Determinar el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

SOLUCIÓN:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{x^{2(n+1)+1}}{\left[2(n+1)+1\right]!}}{\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \frac{x^{2n+3}\,(2n+1)!}{x^{2n+1}\,(2n+3)!} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}$$

Luego $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} r = x^2 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = x^2\,(0) = 0$

Como debe tenerse $|\rho| < 1$ para que la serie converja, se concluye que la serie converge para todo valor real de x. El intervalo de convergencia es IR

V.88 Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(n+2)}$ obtener el intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+2)(n+3)}}{\dfrac{(-1)^n x^n}{(n+1)(n+2)}} = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}\,(n+1)(n+2)}{(-1)^n x^n\,(n+2)(n+3)} =$$

$$r = \frac{(-1)\,x\,(n+1)}{n+3} = -x\left(\frac{n+1}{n+3}\right)$$

entonces $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} r = \rho = -x \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} = -x\,(1) = -x$, $|\rho| < 1 \;\Rightarrow\; |-x| < 1$

esto es $-1 < -x < 1$ que resulta ser $-1 < x < 1$.

- Si $x = -1$, se tiene $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ convergente.
- Si $x = 1$, la serie queda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$ que es convergente. El intervalo de convergencia es el intervalo cerrado $-1 \le x \le 1$ o bien $[-1,\ 1]$.

V.89 Siendo $c > 0$, considérese la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-c)^{n-1}}{c^{n-1}}$ y determínese su intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(x-c)^n}{c^n}}{\frac{(x-c)^{n-1}}{c^{n-1}}} = \frac{(x-c)^n c^{n-1}}{(x-c)^{n-1} c^n} = \frac{x-c}{c}$$

Ahora,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} r = \lim_{n\to\infty} \frac{x-c}{(x-c)^{n-1} c^n} = \frac{x-c}{c}$$

La serie es convergente si $|\rho| < 1$, esto es,

$$\left| \frac{x-c}{c} \right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x-c}{c} < 1 \Rightarrow -c < x - c < c \Rightarrow 0 < x < 2c$$

En los extremos de este intervalo se tiene,

- Si $x = 0$ queda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-c)^{n-1}}{c^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$. que es una serie divergente

- Si $x = 2c$ la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{n-1}}{c^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ que también es una serie divergente.

Luego el intervalo de convergencia es el intervalo abierto $0 < x < 2c$ 0 $(0,\ 2c)$

V.90 Dada la serie de signos alternados $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, n!\,(x-4)^n}{3^n}$ determinar su intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!\,(x-4)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n \, n!\,(x-4)^n}{3^n}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!\,(x-4)^{n+1}\,3^n}{(-1)^n \, n!\,(x-4)^n\,3^{n+1}} =$$

$r = \frac{(-1)(n+1)(x-4)}{3}$; $\lim_{n\to\infty} r = \infty$, luego la serie es convergente únicamente para $x = 0$

V.91 Obtener el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,(x+1)^{n+1}}{n-1}$

SOLUCIÓN:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+2}(x+1)^{n+2}}{n}}{\dfrac{(-1)^{n+1}\,(x+1)^{n+1}}{n-1}} = \frac{(-1)^{n+2}(x+1)^{n+2}(n-1)}{(-1)^{n+1}\,(x+1)^{n+1}\,n} = \frac{(-1)\,(x+1)\,(n-1)}{n}$$

$r = -(x+1)\,\frac{n-1}{n}$, $\rho = \lim_{n\to\infty} r = -(x+1)\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = -(x+1)$,

$|\rho| < 1 \Rightarrow |-(x+1)| < 1$, $-1 < -(x+1) < 1 \Rightarrow -1 < x+1 < 1$ luego queda $-2 < x < 0$

En los extremos de este intervalo

- Si $x = -2$, se tiene $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^{n+1}}{n-1}$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ que es divergente.

- Si $x = 0$, resulta la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n-1}$ que es convergente por ser la serie armónica con signos alternados. El intervalo de convergencia es $-2 < x \le 0$ o $(-2, 0]$

V.92 Determinar el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

SOLUCIÓN:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)-1}}{\left[2(n+1)-1\right]!}}{\dfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}} = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1} (2n-1)!}{(-1)^n x^{2n-1} (2n+1)!}$$

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1) x^2}{2n(2n+1)} = \frac{-x^2}{2n(2n+1)}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} r = -x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = -x^2 (0) = 0$$

Siempre se tendrá $|\rho| < 1$ por lo cual el intervalo de convergencia es el conjunto de los números reales.

V.93 Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$ determinar el intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN:

Aplicando el criterio del cociente,

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(x+3)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{(x+3)^n}{2^n}} = \frac{(x+3)^{n+1}\,2^n}{(x+3)^n\,2^{n+1}} = \frac{x+3}{2}$$

Así que $\rho = \lim_{n\to\infty} r = \lim_{n\to\infty} \frac{x+3}{2} = \frac{x+3}{2}$

$|\rho| < 1$ implica $\left|\frac{x+3}{2}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x+3}{2} < 1 \Rightarrow -2 < x+3 < 2$ por lo cual queda el intervalo $-5 < x < -1$. Analizando la serie para los valores extremos de este intervalo,

- Si $x = -5$, queda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ que es divergente.

- Si $x = -1$, resulta la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ que es divergente también.

Por lo anterior el intervalo de convergencia es el intervalo abierto $-5 < x < -1$ o bien $(-5, -1)$.

V.94 Sea la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1} x^n}{n+3}$ obtener su intervalo de convergencia

SOLUCIÓN:

Al aplicar el criterio del cociente se tiene que

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{4^{n+2} x^{n+1}}{n+4}}{\dfrac{4^{n+1} x^n}{n+3}} = \frac{4^{n+2} x^{n+1} (n+3)}{4^{n+1} x^n (n+4)} = \frac{4x(n+3)}{n+4}$$

$$\rho = \lim_{n \to \infty} r = 4x \lim_{n \to \infty} \frac{n+3}{n+4} = 4x(1) = 4x$$

$$|\rho| < 1 \Rightarrow |4x| < 1 \Rightarrow -1 < 4x < 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$$

Analizando la serie para los valores extremos de este intervalo

- Si $x = -\frac{1}{4}$, se tiene $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{n+3} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$ que es convergente.

- Si $x = \frac{1}{4}$, la serie queda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{n+3}$ que es divergente.

Por lo anterior se concluye que el intervalo de convergencia es el intervalo semiabierto $-\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{4}$ que puede escribirse $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

V.95 Obtener el desarrollo en serie de Maclaurin de la función $f(x) = sen\,x$.

SOLUCIÓN:

Como se sabe la serie de Maclaurin se puede escribir:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots$$

donde

$$C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

En este caso, $f(x) = sen\,x$, entonces $f(0) = sen\,0 = 0$

$f'(x) = cos\,x$, entonces $f'(0) = cos\,0 = 1$

$f''(x) = -sen\,x$, entonces $f''(0) = -sen\,0 = 0$

$f'''(x) = -cos\,x$, entonces $f'''(0) = -cos\,0 = -1$

$f^{IV}(x) = sen\,x$, entonces $f^{IV}(0) = sen\,0 = 0$

$f^{V}(x) = cos\,x$, entonces $f^{V}(0) = cos\,0 = 1$

$f^{VI}(x) = -sen\,x$, entonces $f^{VI}(0) = -sen\,0 = 0$

$\vdots$ $\vdots$

Así que para $f(x) = sen\,x$

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \ldots$$

Esto es:

$$sen\,x = \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{(-1)}{3!} x^3 + \frac{0}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \ldots$$

$$sen\,x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \ldots$$

Por lo cual

$$sen\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{o bien,} \quad sen\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

V.96 Determinar el desarrollo en serie de Maclaurin de la función $f(x) = \cos x$.

SOLUCIÓN:

Sea $f(x) = cos\,x$, luego, $f(0) = cos\,0 = 1$

$f'(x) = -sen\,x$, entonces $f'(0) = -sen\,0 = 0$

$f''(x) = -cos\,x$, entonces $f''(0) = -cos\,0 = -1$

$f'''(x) = sen\,x$, entonces $f'''(0) = sen\,0 = 0$

$f^{IV}(x) = cos\,x$, entonces $f^{IV}(0) = cos\,0 = 1$

$f^{V}(x) = -sen\,x$, entonces $f^{V}(0) = -sen\,0 = 0$

$f^{VI}(x) = -cos\,x$, entonces $f^{VI}(0) = -cos\,0 = -1$

$\vdots \qquad \vdots$

Sabiendo que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} x^n \text{ , para } f(x) = \cos x \text{ queda:}$$

$$\cos x = 1 \frac{1}{1!} x + \frac{(-1)}{2!} x^2 + \frac{0}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{0}{5!} x^5 + \frac{(-1)}{6!} x^6 + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \ldots$$

Esto es, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(2n)!} x^{2n}$ o bien, $\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{[2(n-1)]!} x^{2(n-1)}$

o todavía

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

V.97 Desarrollar en serie de Maclaurin la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

SOLUCIÓN:

Como $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, se tiene $f(0) = \dfrac{1}{0+1} = 1$

Ahora, $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$, entonces $f'(0) = -\dfrac{1}{(0+1)^2} = -1$

$f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$, entonces $f''(x) = \dfrac{2}{(0+1)^3} = 2$

$f'''(x) = -\dfrac{6}{(x+1)^4}$, entonces $f'''(0) = -\dfrac{6}{(0+1)^3} = -6$

$f^{IV}(x) = \dfrac{24}{(x+1)^5}$, entonces $f^{IV}(0) = \dfrac{24}{(0+1)^5} = 24$

$f^{V}(x) = -\dfrac{120}{(x+1)^6}$, entonces $f^{V}(x) = -\dfrac{120}{(0+1)^6} = -120$

$\vdots$ $\vdots$

Al sustituir estos valores en la serie de Maclaurin se tiene,

$$\frac{1}{x+1} = 1 + \frac{(-1)}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{(-6)}{3!}x^3 + \frac{24}{4!}x^4 + \frac{(-120)}{5!}x^5 + \ldots$$

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$$

Esto es

$$\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{x+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1}$$

V.98 Obtener los primeros tres términos no nulos de la serie de Maclaurin de la función

$$f\ (x) = tan\, x\ .$$

SOLUCIÓN:

Teniendo $f\ (x) = tan\, x$, resulta que $f\ (0) = tan 0 = 0$ como

$f\ '\ (x) = sec^2 x$, entonces $f\ '(0) = sec^2 0 = 1$

$f\ ''(x) = 2\ sec^2 x\ tan\, x$, entonces $f\ ''(0) = 2\ sec^2 0\ tan 0 = 0$

$f\ '''(x) = 2\ sec^4 x + 4\ tan^2 x\ sec^2 x$, por lo que

$$f\ '''(0) = 2\ sec^4 0 + 4\ tan^2 0\ sec^2 0 = 2(1) + 4(0)(1) = 2$$

$$f^{\ IV}(x) = 8\ sec^3 x\ sec\, x\ tan\, x + 4\ tan^2 x\ 2\ sec\, x\ sec\, x\ tan\, x + 8\ tan\, x\ sec^2 x\ sec^2 x =$$

$f^{\ IV}(x) = 8\ sec^4 x\ tan\, x + 8\ tan^3 x\ sec^2 x + 8\ tan\, x\ sec^4 x$, luego

$$f^{\ IV}(0) = 8\ sec^4 0\ tan 0 + 8\ tan^3 0\ sec^2 0 + 8\ tan 0\ sec^4 0 =$$

$$f^{\ IV}(0) = 8\ (1)(0) + 8\ (0)(1) + 8\ (0)(1) = 0$$

$$f^{\ V}\ (x) = 8\ sec^4 x\ sec^2 x + 8\ tan\, x\ 4\ sec^3 x\ sec\, x\ tan\, x +$$
$$+ 8\ tan^3 x\ 2\ sec\, x\ sec\, x\ tan\, x + 8\ sec^2 x\ 3\ tan^2 x\ sec^2 x +$$
$$+ 8\ tan^3 x\ 4\ \ sec^3 x\ sec\, x\ tan\, x + 8\ sec^4 x\ sec^2 x =$$

$$f^{\ V}(x) = 8\ sec^6 x + 32\ tan^2 x\ sec^4 x\, 16\ tan^4 x\ sec^2 x + 24\ tan^2 x\ sec^4 x +$$
$$+ 32\ tan^2 x\ sec^4 x\ x + 8\ sec\, x =$$

$f^{\ V}(x) = 8\ sec^6 x + 88\ tan^2\ \ sec^4 x + 16\ tan^4\ \ sec^2 x + 8\ sec^6 x$, así que

$$f^{\ V}(0) = 8\ sec^6 0 + 88\ tan^2 0\ sec^4 0 + 16\ tan^4 0\ sec^2 0 + 8\ sec^6 0$$

$$f^{\ V}(0) = 8\ (1) + 88\ (0)(1) + 16\ (0)(1) + 8\ (1) = 8 + 8 = 16$$

Sustituyendo en la serie de Maclaurin,

$$tan\, x \doteq 0 + \frac{1}{1!}\, x + 0 + \frac{2}{3!}\, x^3 + 0 + \frac{16}{5!}\, x^5$$

$$tan\, x \doteq x + \frac{2}{3}\, x^3 + \frac{2}{15}\, x^5$$

V.99 Obtener un valor aproximado de $sec\, x$ determinando con la serie de Maclaurin los tres primeros términos no nulos

SOLUCIÓN:

$f\ (x) = sec\, x$, entonces $f\ (0) = sec\, 0 = 1$

$f'\ (x) = sec\, x\ tan\, x$, entonces $f'\ (0) = sec\, 0\ tan\, 0 = 1\ (0) = 0$

$f''\ (x) = sec\, x\ sec^2 x + tan\, x\ sec\, x\ tan\, x = sec^3 x + tan^2 x\ sec\, x$, por lo que

$f''\ (0) = sec^3 0 + tan^2 0\ sec\, 0 = 1 + 0\ (1) = 1$

$f'''\ (x) = 3\ sec^2 x\ sec\, x\ tan\, x + tan^2 x\ sec\, x\ tan\, x + sec\, x\ 2\ tan\, x\ sec^2 x =$

$f'''\ (x) = 3\ sec^3 x\ tan\, x + tan^3 x\ sec\, x + 2\ tan\, x\ sec^3 x =$

$f'''\ (x) = 5\ sec^3 x\ tan\, x + tan^3 x\ sec$, luego

$f'''\ (0) = 5\ sec^3 0\ tan\, 0 + tan^3 0\ sec\, 0 = 5\ (0)\ (1) + (0)\ (1) = 0$

$f^{IV}(x) = 5\ sec^3 x\ sec^2 x\ 5\ tan\ x\ 3\ sec^2 x\ sec\, x\ tan\ x +$

$+ tan^3 x\ sec\, x\ tan\, x + sec\, x\ 3\ tan^2 x\ sec^2 x =$

$f^{IV}(x) = 5\ sec^5 x + 15\ tan^2 x\ sec^3 x + tan^4 x\ sec\, x + 3\ tan^2 x\ sec^3 x$

$f^{IV}(0) = 5\ (1) + 15\ (0)\ (1) + 0\ (1) + 3\ (0)\ (1) = 5$

Al sustituir estos valores en la serie de Maclaurin queda:

$$sec\, x \doteq 1 + 0 + \frac{1}{2!} x^2 + 0 + \frac{5}{4!} x^4$$

$$sec\, x \doteq 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 \quad \text{si} \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad sec\left(\frac{\pi}{4}\right) \doteq 1 + \frac{\pi}{8} + \frac{5\pi^4}{6144}$$

$$sec\left(\frac{\pi}{4}\right) \doteq 1 + 0.39269 + 0.07927$$

$$sec\left(\frac{\pi}{4}\right) \doteq 1.4796$$

V.100 Desarrollar en serie de Taylor la función $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ alrededor de $x = 1$

Si $$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x+1)^4}$$

$$f'''(x) = -\frac{24}{(x+1)^5}$$

Se observa que

$f(x) = \dfrac{(x+1)!}{(x+1)^{n+2}}(-1)^n$, entonces $f^n(1) = \dfrac{(x+1)!}{2^{n+1}}(-1)^n$ que al sustituir en la serie de Taylor queda:

$$\frac{1}{(x+1)^2} = f(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dfrac{(1)^n(x+1)}{2^{n+1}}}{n!}(x-1)^n$$

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+1)(x-1)^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x}{2}\right)^n (x-1)$$

S U C E S I O N E S
Y
S E R I E S



E J E R C I C I O S
P R O P U E S T O S

Escribir tres términos más y obtener la forma del término enésimo de las siguientes sucesiones

V.101 $2\,,\ 4\,,\ 8\,,\ 16\,,\ \ldots$

V.102 $1\,,\ -\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ -\frac{1}{4}\,,\ \ldots$

V.103 $0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \ldots$

V.104 $\frac{x^2}{3}\,,\ -\frac{x^3}{5}\,,\ \frac{x^4}{7}\,,\ -\frac{x^5}{9}\,,\ \ldots$

V.105 $1\,,\ \frac{2}{\sqrt{2}}\,,\ \frac{4}{\sqrt{3}}\,,\ 4\,,\ \ldots$

V.106 $1\,,\ -\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{9}\,,\ -\frac{1}{16}\,,\ \ldots$

V.107 $3\,,\ \frac{9}{2}\,,\ \frac{27}{6}\,,\ \frac{81}{24}\,,\ \ldots$

Si se sabe que

a) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$ **es convergente** y

b) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\ldots$ **es divergente,**

determinar el carácter de las siguientes series por el criterio de comparación:

V.108 $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\ldots$

V.109 $3+2+\frac{5}{3}+\frac{6}{4}+\ldots$

V.110 $\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{27}+\frac{1}{48}+\ldots$

V.111 $1+2+3+4+\ldots$

V.112 $\frac{2}{3}+1+\frac{6}{5}+\frac{4}{3}+\ldots$

Emplear el criterio del cociente para establecer el carácter de las siguientes series:

V.113 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^4}$

V.114 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$

V.115 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$

V.116 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

V.117 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{2n}}$

V.118 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n$

V.119 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{8^n}$

V.120 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{3^n}$

Para cada una de las siguientes series, determinar si son divergentes o convergentes, en el caso de ser convergente calcular su suma:

V.121 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{3}$

V.122 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n}}$

V.123 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^{n}}$

V.124 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (0.08)^{n}$

V.125 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n}$

V.126 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n}$

V.127 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n}$

V.128 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 100(0.5)^{n}$

V.129 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n}}-\frac{1}{3^{n}}\right)$

V.130 Se deja caer una pelota desde una altura de 10 metros y rebota sucesivamente hasta quedar en reposo. Si la altura que alcanza en cada rebote es de $\frac{9}{10}$ de la altura que tomó en el bote anterior, calcular la distancia vertical total recorrida por la pelota.

Determinar el carácter de las siguientes series:

V.131 $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \ldots$

V.132 $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} + \ldots$

V.133 $-\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{3}{7} + \frac{4}{9} - \ldots$

V.134 $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots$

V.135 $-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{27} + \frac{1}{256} - \ldots$

Determinar si las siguientes series son absoluta o condicionalmente convergentes:

V.136 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3}$

V.137 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$

V.138 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

V.139 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!\,10^n}$

V.140 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,5^{n-1}}{(n+1)^2\,4^{n+2}}$

V.141 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

V.142 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

V.143 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,n}{n^2+1}$

Obtener el intervalo de convergencia de las siguientes series

V.144 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$

V.145 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

V.146 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n\,2^2}$

V.147 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}(2x-1)^n$

V.148 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\,(2x-1)^n$

V.149 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-1)}$

V.150 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$

V.151 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n\,5^n}$

V.152 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

V.153 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{10^n}$

V.154 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n x^n}{7^n}$

V.155 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3^n (n+1)^n}$

Obtener la representación en serie de Maclaurin de las siguientes funciones:

V.156 $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

V.157 $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$

V.158 $h(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

V.159 $i(x) = \dfrac{1}{1-x}$

V.160 $j(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

V.161 $k(x) = -\dfrac{2}{(1-x)^3}$

V.162 $l(x) = sen\, 2x$

V.163 $m(x) = 4\cos x^2$

Obtener la representación en serie de Taylor de las siguientes funciones:

V.164 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alrededor de $x = 1$

V.165 $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ alrededor de $x = 4$

V.166 $h(x) = sen\, x$ alrededor de $x = \dfrac{\pi}{2}$

V.167 $i(x) = cos\, x$ alrededor de $x = \pi$

V.168 $j(x) = \dfrac{1}{x+1}$ alrededor de $x = 1$

V.169 $k(x) = \dfrac{2}{x^2}$ alrededor de $x = 2$

V.170 $m(x) = \dfrac{1}{1-x}$ alrededor de $x = 3$